Доклады Академии Наук СССР
Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS

МАТЕМАТИКА

РЕНЕ КАЛАНСО

О КОНГРУЭНЦИИ (*T*) С. П. ФИНИКОВА И О ПРОЕКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ, КОТОРЫЕ С НЕЙ СВЯЗАНЫ

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 15 IV 1935)

1. В этом сообщении я рассматриваю наиболее общую систему четырех точек P_1, P_2, P_3, P_4, которые перемещаются в пространстве в зависимости от двух параметров, с тем прежде всего, чтобы получить характеристическое свойство конфигурации (*T*) С. П. Финикова.*

Предположим, что при любом выборе параметров эти четыре точки не лежат в одной плоскости так, что ни в одной из трех пар противоположных сторон

$$(P_2P_3, P_1P_4), \quad (P_3P_1, P_2P_4), \quad (P_1P_2, P_3P_4)$$

прямые не пересекаются.

Рассмотрим пучок поверхностей 2-го порядка, проходящих через прямые двух первых пар, и поставим следующую задачу:

„Характеризовать тот случай, когда среди поверхностей пучка найдется поверхность 2-го порядка Q, которая допускала бы два бесконечно малых перемещения так, чтобы характеристика огибающей, соответствующая первому из этих перемещений, содержала (как часть) первую пару противоположных сторон, а характеристика при втором перемещении — прямые второй пары".

Мы доказываем, что для того, чтобы это свойство имело место, необходимо, чтобы прямые

$$P_2P_3 \quad \text{и} \quad P_1P_4$$

описывали две конгруэнции, находящиеся в отношении преобразования (*T*) Финикова и чтобы прямые

$$P_3P_1 \quad \text{и} \quad P_2P_4$$

образовали дополнительные конгруэнции. Обратно, отправляясь от такой конфигурации, найдем действительное решение проблемы. Отмеченные бесконечно-малые перемещения при этом вполне определены, хотя поставленному условию можно удовлетворить двумя способами в том смысле, что характеристика некоторой поверхности 2-го порядка Q_1 в первом перемещении содержит прямые

$$P_1P_2;\ P_2P_4$$

и во втором — прямые

$$P_1P_4;\ P_2P_3,$$

а характеристика другой поверхности 2-го порядка Q_2 наоборот — в первом перемещении содержит прямые P_1P_4; P_2P_3 и во втором — P_1P_2; P_2P_4.

* См. S. Finikoff, Transformation (*T*) des congruences de droites (Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, сер. II, т. II, 1933). Пользуюсь случаем выразить свою благодарность проф. Финикову, который любезно согласился передать в „Московский математический сборник" мемуар, содержащий полное изложение настоящей заметки.

Отсюда следует, что Q_1 и Q_2 образуют обобщенную конфигурацию Годо.

Обозначим через (P_1), (P_2), (P_3), (P_4) поверхности, описанные этими четырьмя точками. Когда конфигурация испытывает одно из указанных выше перемещений, каждая из точек P_i перемещается по поверхности (P_i). Соединяя точку P_i с двумя бесконечно близкими точками, таким образом получаемыми, мы будем иметь две касательных к поверхности (P_i), которые будем называть главными касательными.

Линии, огибаемые на каждой поверхности (P_i) главными касательными, образуют систему линий, которую мы будем называть главной системой.

Заметим, что преобразование поверхности с помощью конгруэнции устанавливает между точками этой поверхности и точками второй полости фокальной поверхности некоторое соответствие, в котором соответствуют друг другу фокусы одного и того же луча, соответствующие точки описывают соответствующие линии и т. д.

Относительно этого соответствия мы прежде всего отметим следующую теорему: пары соответствующих касательных в точках (P_1) и (P_2) пересекают диагональ P_3P_4 по двум проективным рядам точек. Мы будем обозначать буквой π это проективное соответствие.

Из этой теоремы можно получить следующее построение главных касательных:

„Рассмотрим касательные к поверхности (P_1), сопряженные соответственно прямым P_1P_3 и P_1P_4; эти касательные пересекают диагональ P_3P_4 в двух точках, которые мы обозначим P_3' и P_4'. Рассмотрим совершенно также на поверхности (P_2) касательные, сопряженные прямым

$$P_2P_3 \quad \text{и} \quad P_2P_4;$$

пусть они пересекают P_3P_4 в точках P_3'' и P_4''.

В таком случае, если обозначить через I_1 инволюцию пар точек, образующих с обеими парами

$$(P_3P_3') \quad \text{и} \quad (P_4P_4')$$

равные ангармонические отношения и через I_2 такую же инволюцию по отношению к парам (P_3P_3'') и (P_4P_4''); если обозначить через I_2' инволюцию, получаемую из I_2 посредством гомографии π, то главные касательные поверхности (P_1) получатся, если из точки P_1 спроектировать общие точки обеих инволюций I_1 и I_2'".

Кроме того, имеем: сложное отношение главных касательных поверхности с лучом конгруэнции и касательной ему сопряженной одно и то же для всех четырех поверхностей; мы будем называть его характеристикой конгруенции (T). Установив эти основные свойства систем (T), мы вводим преобразование их.

Мы видели, что характеристика поверхности 2-го порядка Q_1 в первом главном перемещении содержит, как часть прямые P_1P_3 и P_2P_4. Полная характеристика, кроме этих двух прямых, содержит еще две образующие другой системы, которые мы обозначим M_1M_3 и M_2M_3. Аналогично, другая характеристика той же поверхности 2-го порядка, во втором главном перемещении, состоит из прямых P_1P_4 и P_2P_3 и двух образующих другой системы M_1M_4 и M_2M_3.

Поверхность Q_1, как элемент семейства с двумя параметрами, имеет восемь характеристических точек

$$P_1, \ldots P_4, \quad M_1, \ldots M_4.$$

Конгруэнции, образованные прямыми

$$M_1M_3,\quad M_2M_4,\quad M_1M_4,\quad M_2M_3,$$

составляют новую конфигурацию (T). Действительно, например, в точке M_1 поверхность Q_1 и ее огибающая имеют одну и ту же касательную плоскость, и прямые M_1M_3 и M_1M_4, как образующие поверхности Q_1, являются касательными огибающей.

Эту систему четырех новых конгруэнций мы будем называть системой производной от конфигурации (T), от которой мы отправлялись.

Что касается до характеристик системы (T) и ее производной,* то здесь могут быть весьма разнообразные соотношения. В частности существуют системы (T), характеристики которых суть числовые постоянные, и системы (T), характеристики которых равны характеристикам их производных.

2. Замечателен случай конфигурации (T) с характеристикой равной -1.

Действительно, в этом случае на каждой фокальной поверхности главные касательные гармонически разделяют две пары сопряженных касательных и, в силу этого, совпадают с асимптотическими касательными; на каждой фокальной поверхности главная система есть система асимптотических линий, а так как главные системы соответствуют друг другу, то все четыре конгруэнции суть конгруэнции W.

Далее, можно установить и обратную теорему для не специальной системы (T) (т. е. при условии, что в каждой из четырех конгруэнций ∞^2 лучей распределяется на два различных семейства развертывающихся поверхностей и две противоположных конгруэнции никогда не принадлежат одному линейному комплексу).

При этих условиях, обратная теорема читается так:

Если одна конгруэнция (T) есть конгруэнция W, то все четыре суть W (Фиников); кроме того, характеристика системы равна -1 и на каждой фокальной поверхности главная система состоит из асимптотических линий.

3. Кроме того, замечателен тот факт, который трудно было предвидеть, что задача определения конфигурации (T) с характеристикой -1 равносильна образованию наиболее общей сети O Гишара в пространстве шести измерений.

Случай конфигурации (T) с характеристикой -1, производная система которой имеет тоже характеристику -1, приводит нас к преобразованию сетей O Гишара в пространстве шести измерений. Эти сети, при условии, что производная система тоже имеет характеристику -1, характеризуются соотношением между их элементами.

Можно также приложить эти соображения к образованию проективно-минимальных поверхностей. Мы развиваем этот метод построения в мемуарах, представленных в „Московский математический сборник“.

Поступило
15 IV 1935.

---

* Не следует смешивать понятие характеристики как числа, о которой здесь говорится, с понятием характеристики как кривой при определенном перемещении, о которой мы говорили раньше.

SUR LA CONFIGURATION (*T*) DE FINIKOFF ET SUR LES ÉLÉMENTS PROJECTIFS QUI S'Y RATTACHENT

Par RENÉ CALAPSO

(*Présenté par N. Lusin, de l'Académie, le 15. IV. 1935*)

1. Dans cette note, je considère, de la manière la plus générale, un système de quatre points dans l'espace, P_1, P_2, P_3, P_4, variables par rapport à deux paramètres, pour venir, avant tout, à une propriété caractéristique de la configuration (*T*) de Finikoff.*

Supposons que, pour un choix quelconque des paramètres, les quatre points n'appartiennent pas à un plan; on a alors trois couples de côtés opposés $(P_2P_3,\ P_1P_4)$, $(P_3P_1,\ P_2P_4)$, $(P_1P_2,\ P_3P_4)$ tels que les droites d'un même couple ne se coupent jamais.

Considérons le faisceau des quadriques qui passent par les droites des deux premiers couples, et posons la question suivante:

„Caractériser les cas où dans le faisceau il existe une quadrique Q qui admette deux déplacements infiniment petits, de telle sorte que la courbe caractéristique de l'enveloppe, relative à l'un des deux déplacements, admette (comme partie) le premier couple de côtés opposés, et celle relative à l'autre déplacement admette, comme partie, les droites du second couple".

Ici nous démontrons que, pour que la propriété requise ait lieu, il faut que les droites P_2P_3 et P_1P_4 engendrent deux congruences en transformation (*T*) de Finikoff et que les droites P_3P_1 et P_2P_4 engendrent les congruences complémentaires. Inversement, partant d'une telle configuration on a une solution effective du problème où les déplacements définis ci-dessus sont parfaitement individualisés; néanmoins on satisfait de deux manières à la condition requise, dans le sens que pour une certaine quadrique Q_1 la courbe caractéristique suivant le premier déplacement admet les droites P_1P_3; P_2P_4; et celle suivant l'autre déplacement admet les droites P_1P_4; P_2P_3; pour une autre quadrique Q_2 la courbe caractéristique suivant le premier déplacement admet les droites P_1P_4; P_2P_3; celle suivant l'autre déplacement admet les droites P_1P_3; P_2P_4.

Par conséquent les deux quadriques Q_1 et Q_2 offrent une configuration de Godeaux généralisée.

Indiquons par (P_1), (P_2), (P_3), (P_4) les surfaces décrites par les quatre points, et notons que, lorque la configuration subit les deux déplacements ci-dessus définis, le point P_i subit deux déplacements sur la surface (P_i). Joignant le point P_i aux deux points, infiniment proches, ainsi obtenus, on obtient deux tangentes à la surface (P_i) que nous appelons tangentes principales.

Sur chaque surface (P_i) les lignes enveloppées par les tangentes principales forment un système de lignes que nous appelons le système principal.

* Voir: S. Finikoff, Transformation (*T*) des congruences de droites (Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, série II, vol. II. 1933, Bologna, Zanichelli editore). J'exprime mes remerciements à M. S. Finikoff qui a bien voulu présenter au „Recueil math." de Moscou les mémoires dont nous donnons ici un bref résumé.

Il faut ensuite observer que la transformation d'une surface par congruence rectiligne donne lieu à une correspondance entre les points de celle-ci et les points de la seconde focale, où se correspondent les foyers d'un même rayon; lignes correspondantes sont celles décrites par des points correspondants; tangentes correspondantes sont des tangentes à des courbes correspondantes en des points correspondants.

Sur cette correspondance nous avons relevé d'abord le théorème suivant. Les couples de tangentes correspondantes en (P_1) et (P_2) coupent sur la diagonale P_3P_4 deux divisions homographiques.

Dans la suite nous désignerons par π cette homographie.

De ce théorème on déduit la construction des tangentes principales, de la manière suivante:

„Considérons les tangentes à la surface (P_1) conjuguées respectivement aux P_1P_3 et P_1P_4; ces tangentes coupent la diagonale P_3P_4 en deux points que nous appelons P_3' et P_4'. Pour la surface (P_2) considérons, de même, les tangentes conjuguées aux P_2P_3 et P_2P_4; elles coupent P_3P_4 en deux points que nous appelons P_3'' et P_4''.

Cela posé, si l'on désigne par I_1 l'involution des couples qui avec les deux couples (P_3P_3') et (P_4P_4') forment des rapports anharmoniques égaux entre eux; et si l'on désigne par I_2 l'involution des couples qui avec les deux couples $(P_3''P_3)$ et (P_4P_4'') forment des rapports anharmoniques égaux entre eux; si l'on désigne par I_2' l'involution transformée de I_2 moyennant l'homographie π; projetant de P_1 le couple commun aux deux involutions I_1 et I_2' on obtient les tangentes principales de la surface (P_1)".

On a, en outre, que:

Le rapport anharmonique que les tangentes principales d'une surface forment avec le rayon de la congruence et avec la tangente conjuguée avec lui est le même pour toutes les quatre surfaces et nous l'appelons ici la caractéristique de la configuration (T).

Après avoir établi ces propriétés fondamentales des systèmes (T), nous introduisons une transformation en partant des considérations suivantes:

On a vu que la courbe caractéristique de la quadrique Q_1 (relative au premier déplacement principal) admet, comme partie, les droites P_1P_3 et P_2P_4; la caractéristique complète se compose des susdites droites et de deux génératrices de l'autre système, que nous appelons M_1M_3 et M_2M_4. Également, la courbe caractéristique de la même quadrique, relative au second déplacement principal, se compose des droites P_1P_4 et P_2P_3 et de deux génératrices de l'autre système M_1M_4 et M_2M_3.

La même quadrique Q_1, considérée comme élément générique d'une famille à deux paramètres, admet comme caractéristique les huit points $P_1, \ldots P_4, M_1, \ldots M_4$.

Les congruences engendrées par les droites

$$M_1M_3; \quad M_2M_4; \quad M_1M_4; \quad M_2M_3$$

sont aussi en configuration (T); en effet, par exemple, dans le point M_1 la quadrique et son enveloppe ont le même plan tangent, et les droites M_1M_3 et M_1M_4 (étant des génératrices de la quadrique) sont donc des tangentes à l'enveloppe.

Le système des nouvelles congruences s'appelera le système dérivé de la configuration (T), dont nous sommes partis.

En ce qui regarde la caractéristique du système (T) et la caractéristique du système dérivé,* il peut se présenter des circonstances très variées: en particulier on a des systèmes (T) dont la caractéristique est une constante numérique, et des systèmes (T) dont la caractéristique est égale à celle du système dérivé.

2. Un cas fort remarquable est celui de la configuration (T) à caractéristique —1.

En effet dans ce cas, sur chaque focale les tangentes principales séparent harmoniquement deux couples de tangentes conjuguées et, par suite, coïncident avec les tangentes asymptotiques: sur chaque focale le système principal est donc celui des lignes asymptotiques et, puisque sur les quatre focales les systèmes principaux correspondent, nous en déduisons que les congruences sont des congruences W.

Nous procédons aussi à l'inversion de ce théorème, pour un système (T) non spécial, c'est à dire où dans chacune des quatre congruences les ∞^2 rayons se laissent répartir en deux familles distinctes de développables et où deux congruences opposées n'appartiennent jamais à un même complexe linéaire.

Pourvu que ces conditions soient remplies, le théorème précédent s'invertit ainsi:

Si une congruence d'un système (T) est W, toutes les quatre le sont (Finikoff), mais de plus la caractéristique de la configuration est par nécessité —1 et sur chaque focale le système principal est celui des asymptotiques.

3. En outre, fait des plus remarquables et difficile à prévoir c'est que le problème de déterminer les configurations (T) à caractéristique —1 est équivalent à la formation des réseaux O de Guichard (les plus généraux) d'un espace à six dimensions.

Par conséquent, le cas de la configuration (T) à caractéristique —1 dont le système dérivé a aussi la caractéristique —1, nous conduit à une transformation des réseaux O de Guichard d'un espace à six dimensions, réseaux qui, pourvu que le système dérivé soit aussi à caractéristique —1, sont caractérisés par une certaine relation entre leurs éléments.

On peut de même appliquer les considérations ci-dessus à la formation des surfaces minimales-projectives selon la méthode que nous développons dans nos mémoires à paraître prochainement dans le „Recueil mathématique“ de Moscou.

Manuscrit reçu
le 15. IV. 1935.

---

* Il ne faut pas confondre la notion de caractéristique numérique, dont il est question ici, avec celle de courbe caractéristique d'un déplacement, dont nous avons déjà parlé.

Н. В. АДАМОВ

НЕКОТОРЫЕ ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

(*Представлено академиком А. Н. Крыловым 28 III 1935*)

В моей предыдущей заметке [1] известное условие Ляпунова относительно устойчивости интегралов уравнения

$$u'' + p(x)\,u = 0 \tag{1}$$

выведено из рассмотрения последовательных приближений для интеграла уравнения

$$z' = -(z^2 + p(x)), \tag{2}$$

полученного из уравнения (1) заменой $\frac{u'}{u} = z$. Для этой цели оказалось достаточным рассмотреть одно первое приближение. Выведем теперь из рассмотрения следующих приближений ряд условий устойчивости, применимых там, где условие Ляпунова не удовлетворяется.

Даны уравнения:

$$z' = -(z^2 + p_1(x)), \tag{3}$$

$$z' = -(z^2 + p_2(x)). \tag{4}$$

Функции p_1 и p_2 не отрицательны при $x_0 < x < x_1$.

Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \int_{x_0}^{x} p_1(x)\,dx; \quad \varphi_k = \varphi_1 + \int_{x_0}^{x} \varphi_{k-1}^2(x)\,dx, \\ \psi_1 &= \int_{x_0}^{x} p_2(x)\,dx; \quad \psi_k = \psi_1 + \int_{x_0}^{x} \psi_{k-1}^2(x)\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Допустим, что функции $p_1(x)$ и $p_2(x)$ таковы, что справедливы неравенства:

$$\varphi_1(x) < \psi_1(x)\ (x_0 < x < \zeta); \quad \varphi_1(x) > \psi_1(x)\ (\zeta < x < x_1); \tag{6}$$

и разность $\varphi_1(x) - \psi_1(x)$ возрастает при $x > \zeta$.

Лемма. *Если в интервале* (x_0, x_1) *справедливо неравенство*

$$\psi_k(x) > \varphi_k(x) \tag{7}$$

для какого-либо целого положительного k, *то и неравенства*

$$\psi_i(x) > \varphi_i(x), \quad (i > k) \tag{7_1}$$

справедливы в этом же интервале.

Следующие две теоремы получаются, как следствие этой леммы и того факта, что функции

$$-\varphi_1, -\varphi_2, \ldots, -\varphi_n, \ldots \quad \text{и} \quad -\psi_1, -\psi_2, \ldots, -\psi_n, \ldots$$

являются соответственно последовательными приближениями интегралов z_1 и z_2 уравнений (3) и (4), обращающихся в 0 при $x = x_0$.

Теорема 1. *Если уравнения* (3) и (4) *имеют интегралы, равные* 0 *при* $x = x_0$ *и конечные в интервале* (x_0, x_1) *и если для какого-либо целого положительного* k *имеет место неравенство* (7) *для значений* x *в том же интервале, то неравенство*

$$z_1 > z_2 \tag{7_2}$$

справедливо для этих же значений x.

Теорема 2. *Если неравенство* (7) *справедливо в интервале* $(x_0 \zeta_1)$ *для какого-либо целого положительного* k *и* z_1 *обращается в* $-\infty$ *при* $x = \zeta$, *то* z_2 *обратится в* $-\infty$ *при* $x = \zeta_2 < \zeta_1$.

Примечание. Теоремы 1 и 2 справедливы, если вместо уравнения (4) взять уравнение

$$z^1 = -z^2 \tag{8}$$

и обозначить через z_2 его интеграл, равный некоторому отрицательному числу $-h$ для $x = x_0$. В этом случае функции ψ_k определяются равенствами:

$$\psi_1(x) = h; \quad \psi_k(x) = h + \int_{x_0}^{x} \psi_{k-1}^2(x)\,dx. \tag{8_1}$$

Этот интеграл обращается в $-\infty$ при $x = x_0 + \frac{1}{h}$.

Рассмотрим уравнение (3) при условии:

$$\varphi_2(x_1) = \varphi_1(x_1) + \int_{x_0}^{x_1} \varphi_1^2(x)\,dx = h_2. \tag{9}$$

Возьмем интеграл z_2 уравнения (8) равный $-a$ при $x = x_0$, где a определено из равенства

$$a + a^2(x_1 - x_0) = h. \tag{9_1}$$

Сравнивая, на основании теоремы 2 и примечания интеграл z_1 уравнения (3), равный 0 при $x = x_0$, и интеграл z_2 уравнения (8), имеем: z_1 конечен при $x < x_1$, если

$$x_1 - x_0 < \frac{1}{a}, \quad \text{т. е.} \quad x_1 - x_0 < \frac{2}{h}.$$

Аналогично, рассматривая m-ое приближение интегралов z_1 и z_2, получаем: z_1 конечен, если

$$x_1 - x_0 < \frac{\alpha_m}{h_m},$$

где $h_m = \varphi_m(x_1)$ и α_m определяется по формуле:

$$\alpha_m = \frac{\psi_m\left(x_0 + \frac{1}{a}\right)}{a} \left(\psi_1(x) = a,\ \psi_k(x) = \psi_1 + \int_{x_0}^{x} \psi_{k-1}^2(x)\,dx \right). \tag{10}$$

Эти же рассуждения справедливы и в случае $x_1 < x_0$ (с точностью до знака ψ_k). Напомним, что интеграл уравнения (1), где $p(x)$ периодическая, непрерывная функция периода ω, устойчивы, если наименьшее из возможных расстояний между нулями интеграла этого уравнения больше ω [1].

Интегралы уравнения (1) обращаются в 0 при тех значениях x, при которых соответствующие интегралы уравнения (2) бесконечны. Отсюда, обозначив через $\varphi_1(\zeta x)$ и $\varphi_i(\zeta, x)$ следующие функции:

$$\varphi_1(\zeta, x)=\int_\zeta^x p(x)\,dx; \quad \varphi_i(\zeta, x)=\varphi_1(\zeta, x)+\int_\zeta^x \varphi_{i-1}^2(x)\,dx, \tag{11}$$

имеем:

Теорема 3. *Если нельзя найти таких чисел x_1 и ζ, что для некоторого целого положительного k справедливы неравенства:*

$$(x_1-\zeta)\varphi_k(\zeta, x_1)<\alpha_k; \quad |(x_1-\omega-\zeta)\varphi_k(\zeta, x_1-\omega)|<\alpha_k, \tag{12}$$

то интегралы уравнения (2) *устойчивы.*

Эта теорема дает бесконечную последовательность признаков устойчивости, из которых каждый следующий сильнее предыдущего и первый совпадает с признаком Ляпунова.

Поступило
28 III 1935.

MATHÉMATIQUES

SUR QUELQUES CONDITIONS DE STABILITÉ

Par N. V. ADAMOV (ADAMOFF)

(*Présenté par A. N. Krylov, de l'Académie, le 28. III. 1935*)

Dans notre précédente note (1) nous avons montré qu'on peut retrouver la condition de stabilité des intégrales de l'éq uation $u''+p(x)u=0$(1), donnée par Liapounoff, en appliquant la méthode des approximations successives à l'équation (2), à laquelle on ramène l'équation (1) par la substitution $\frac{u'}{u}=z$ (les formules se trouvent dans le texte russe). Il n'a fallu considérer pour cela que la première approximation. Nous allons donner une série de conditions de stabilité, applicables aux cas où la condition de Liapounoff n'est pas satisfaite. Ces conditions seront déduites de l'étude de toute la suite des approximations successives.

Soient données deux équations (3) et (4), les fonctions $p_1(x)$ et $p_2(x)$ étant non négatives dans l'intervalle (x_0, x_1). Définissons par les égalités (5) deux suites des fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x)\ldots\varphi_n(x)\ldots$ et $\psi_1(x)\psi_2(x)\ldots\psi_n(x)\ldots$ Les fonctions $p_1(x)$ et $p_2(x)$ soient telles que les inégalités (6) soient vérifiées et la différence $\varphi_1(x)-\psi_1(x)$ croisse pour $x>\zeta$.

Lemme. *Si l'inégalité* (7) *est vérifiée dans l'intervalle $(x_0 x_1)$, k étant un entier positif quelconque, l'inégalité* (7_1) *est aussi vérifiée pour $x_0<x<x_1$ et pour toutes les valeurs de i telles que $i>k$.*

On sait que les fonctions $-\varphi_1, -\varphi_2\ldots-\varphi_n\ldots$ sont les approximations successives de l'intégrale z_1 de l'équation (3), égale à zéro pour $x=x_0$. La même chose vaut pour les fonctions $-\psi_1, -\psi_2, \ldots, -\psi_n, \ldots$ et l'intégrale z_2 de l'équation (4). Les deux théorèmes suivants sur ces intégrales z_1 et z_2 sont des conséquences immédiates du lemme.

Théorème 1: *Si les intégrales z_1 et z_2 sont finies dans l'intervalle (x_0, x_1), et si l'inégalité* (7) *est vérifiée, k étant un entier positif quelconque, $x_0 < x < x_1$, l'inégalité* (7_2) *est aussi vérifiée dans le même intervalle.*

Théorème 2. *Si l'inégalité* (7) *est vérifiée, k étant un entier positif, dans l'intervalle $(x_0 \zeta_1)$ et si z_1 devient infini pour $x = \zeta_1$, l'intégrale z_2 devient infinie pour $x = \zeta_2 < \zeta_1$.*

Remarque. Les théorèmes 1 et 2 ne cessent pas d'être valables, si, au lieu de l'équation (4), on considère l'équation (8), en désignant par z_2 l'intégrale de cette dernière équation, égale à un nombre négatif $-h_2$ pour $x = x_0$; les fonctions $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_n \ldots$ sont définies dans ce cas par les égalités (8_1). On s'assure aisément que cette intégrale z_2 devient infinie pour $x = x_0 + \frac{1}{h_2}$.

Considérons l'équation (3), $\varphi_2(x)$ vérifiant l'égalité (9). Soit z_2 l'intégrale de l'équation (8) égale à $-a$ pour $x = x_0$, a étant défini par l'égalité (9_1). Selon le théorème 2 et la remarque précédente l'intégrale z_1 de l'équation (3) ne peut pas devenir infinie pour $x \leqslant x_1$, si l'on a

$$x_1 - x_0 < \frac{1}{a}, \quad \text{c'est à dire } x_1 - x_0 < \frac{2}{h}.$$

Par des raisonnements analogues on démontre que l'intégrale z_1 reste finie dans l'intervalle $(x_0 x_1)$, si l'on a

$$x_1 - x_0 < \frac{\alpha_m}{h_m},$$

où α_m et h_m sont des nombres définis par les formules (10).

Il est facile de voir que, x_1 étant inférieur à x_0, l'intégrale z_1 ne devient pas infinie dans l'intervalle (x_1, x_0), si la différence $x_0 - x_1$ vérifie les mêmes inégalités.

Soit maintenant donnée une équation (1), $p(x)$ étant une fonction non négative, continue et périodique de période ω. Une des conditions de la stabilité des intégrales de cette équation est la suivante: la plus petite distance possible entre deux zéros consécutifs de l'intégrale arbitraire de l'équation (2) est supérieure à ω [1]. Désignons par $\varphi_1(\zeta, x)$, $\varphi_2(\zeta, x) \ldots$ les fonctions définies par les égalités (11). Nous avons alors le théorème;

Théorème 3. *Si, k étant un entier quelconque, on ne peut trouver deux nombres x, ζ tels, que les inégalités* (12) *soient satisfaites, les intégrales de l'équation* (2) *sont stables.*

Ce théorème donne une suite infinie de conditions de stabilité, dont la première est la condition de Liapounoff.

Manuscrit reçu
le 28. III. 1935.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITTÉRATURE CITÉE

[1] Н. В. Адамов, ДАН, 1935, II, № 5-6. N. Adamoff, C. R. Acad. Sci. URSS, 1935, v. II, № 5-6.

АСТРОНОМИЯ

Б. В. НУМЕРОВ

член-корреспондент Академии Наук СССР

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ОШИБОК ЗВЕЗДНЫХ ПОЛОЖЕНИЙ

Вопрос о систематических ошибках звездных систем и в первую очередь склонений звезд до сих пор еще не разрешен. Сравнение рядов наблюдений, произведенных на различных обсерваториях с различным инструментами, не дает, повидимому, возможность установить истинную систему. Ньюкомб предложил для этой цели использовать наблюдения планет. Действительно, если мы отвлечемся от возмущений в движении планет (ибо мы можем с любой степенью точности эти возмущения вычислять), то невозмущенная орбита планеты будет лежать в плоскости, проходящей через центр Солнца, и, следовательно, путем сравнения положений планеты с близлежащими звездами, в течение полного периода обращения планеты, можно определить систематическую ошибку склонений звезд в близэкваториальной области. Однако, до сих пор мало внимания было обращено на возможность использования для этой цели малых планет (1). Последние имеют значительные преимущества перед большими планетами в том, что не имеют дисков, а следовательно, могут также точно наблюдаться, как и звезды.

В 1932 г. (2) мы привели обоснование метода и показали, что из небольшого числа оппозиций из сравнения теории с наблюдениями с наибольшим весом можно определить коэффициент a', один из коэффициентов, входящих в обычную формулу систематических ошибок каталогов.

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= a + b\cos\alpha + c\sin\alpha + \ldots, \\ \Delta\delta &= \alpha' + b'\cos\alpha + c'\sin\alpha + \ldots, \end{aligned} \tag{1}$$

т. е. определить постоянную ошибку склонений звезд близ экватора. Действительно, обозначая через $\varepsilon_{(\alpha)}$ и $\varepsilon_{(\delta)}$ разности между наблюденными и вычисленными положениями планет и беря среднее из шести оппозиций для планеты Leona для одного оборота, мы получили следующие формулы:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}\sum \varepsilon_\alpha &= -1.78\,a + 0.68\,b - 0.72\,c + 0.00\,a' + 0.00\,b' + 0.00\,c', \\ \frac{1}{6}\sum \varepsilon_\delta &= +0.02\,a + 0.00\,b - 0.11\,c + 0.87\,a' - 0.03\,b' - 0.03\,c', \end{aligned} \tag{2}$$

которые подтверждают возможность более точного определения коэффициента a', а также и коэффициента a (поправки равноденствия). Далее мы показали, что ошибки элементов орбиты Земли имеют малое влияние на средние значения разностей $\varepsilon_{(\delta)}$ из нескольких оппозиций.

Исходя из этих соображений, мы предложили план организации наблюдений и вычислений для небольшой группы малых планет. Мы ставили себе целью сосредоточить внимание на зоне близ экватора (от —10 до +10°). Только в этом случае более обоснованно принимать, что коэффициенты в формуле (1) являются постоянными числами и не зависят от склонения. Ссылаясь на нашу работу, проф. Броуер (3) в начале 1935 г. опубликовал свой план использования малых планет для

определения систематических ошибок звездных положений. Он предложил иной список планет для этой цели. Если мы стремились к узкой зоне вблизи экватора, то профессор Броуер предлагает использовать планеты с большими наклонностями с тем, чтобы расширить зону определения систематических ошибок. Вряд ли возможно при наблюдениях нескольких оппозиций планет вводить, как предлагает проф. Броуер, в условные уравнения неизвестные коэффициенты формулы (1), полагая при этом различные значения коэффициентов для различных зон склонений. Мы несогласны с этим расширением предложенного нами плана.

Для избранных планет следует в течение 4—6 месяцев около оппозиции вести точные наблюдения положения планет и привязывать их к принятой фундаментальной системе. Можно ограничиться одним оборотом для каждой планеты, т. е. периодом около 6 оппозиций. Параллельно с производством наблюдений необходимо построить приближенную теорию движения планеты, следуя методу экстраполирования координат с точностью до 7-го знака. Эта теория даст возможность вычислять точные эфемериды для наблюдателей и послужит основанием для построения точной теории движения планеты с учетом возмущений от всех больших планет. Наши последние исследования показали, что для точной теории движения планеты, обеспечивающей представление до 0.02 в течение десяти лет, достаточно вести экстраполирование в 9-м знаке с минимальным интервалом 20 дней. При небольшом числе оппозиций мы не будем иметь большого числа различных условных уравнений, поэтому более правильно кроме неизвестных поправок исходных шести оскулирующих элеметов ввести шесть поправок к элементам Земли (включая ошибку единицы масштаба) и поправку массы Юпитера, т. е. всего неизвестных числом 13. Решая условные уравнения отдельно по каждой планете, мы найдем остаточные члены, которые могут дать представление о систематических ошибках фундаментальной системы звезд. Сходимость поправок элементов Земли по различным планетам подтвердит обоснованность предложения переработки теории движения Земли. Дальнейшая дискуссия укажет также на целесообразность вывода элементов движения Земли по наблюдениям и теории движения только малых планет. В этом случае можно избежать наблюдений Солнца при наблюдении фундаментального каталога, т. е. построить систему, опираясь на ночные наблюдения звезд и избранной группы малых планет.

Одним из существенных моментов в организации предлагаемой работы является точное наблюдение малых планет в определенной системе избранного фундаментального каталога. Для этой цели наиболее обоснованным методом являются меридианные наблюдения. Но, к сожалению, яркость малых планет не позволяет вести для большинства малых планет наблюдения на меридианных кругах. Из 48 планет: 2 планеты ярче 8.0, 12 ярче 10.0, 21 ярче 10.5 и 48 планет ярче 11.0. Поэтому одной из существенных задач является постройка светосильного меридианного круга, с помощью которого можно было бы наблюдать планеты до 11.0 или, по крайней мере, до 10.5. Светосильный меридианный круг, установленный в горном районе, в условиях наибольшей прозрачности атмосферы, мог бы с успехом вести систематическую работу по наблюдению нескольких десятков малых планет в определенной системе звезд.*

* Вопросом конструкции светосильного меридианного инструмента занимается в настоящее время Астрономический институт в Ленинграде совместно с Горной обсерваторией в Абастумане. Предварительные соображения по этому поводу будут нами опубликованы в ближайшее время.

С другой стороны наблюдения малых планет можно вести с помощью астрографов. Здесь необходима кооперация целого ряда обсерваторий, как северного, так и южного полушарий. Мы полагаем, что в этой работе должны принимать участие до десяти обсерваторий, полагая что в каждую оппозицию одна планета будет наблюдаться на данном инструменте от пяти до восьми раз. Профессор Броуер предлагает для этой цели воспользоваться наблюдениями двух американских обсерваторий: Флагстафф, Иел (Yale) и отделением Йелской обсерватории в Южной Африке. Наше предложение, представленное Комиссии № 20 Международного астрономического союза в 1932 г., об организации работы, предполагало более широкую кооперацию в проведении всей работы и в этом мы видим успех дела.

Организация работы разбивается на следующие части:

a) Наблюдение планет в системе каталога Босса параллельно с наблюдением новых фундаментальных рядов звезд.

b) Составление нормальных мест и дискуссия систематических ошибок отдельных обсерваторий.

c) Эфемериды и приближенная теория планет до 0.5.

d) Точная теория движения и сравнение с нормальными местами.

Отдельные части работы поручаются отдельным обсерваториям и должны быть опубликованы как материалы для дальнейшей дискуссии не позднее года после окончания одного оборота планеты. Общая организация работы поручается Комиссии № 20 или специальной подкомиссии Международного астрономического союза.

В заключение мы приводим основные положения, которые будем защищать при организации и проведении предлагаемой нами работы.

1. Наблюдения фундаментальных звезд должны сопровождаться наблюдениями малых планет взамен или параллельно с наблюдениями Солнца и больших планет.

2. Обработка длительных рядов старых наблюдений малых планет ввиду трудности выдержать в строгости одну систему звезд даст менее ценные результаты, чем специально поставленные новые ряды наблюдений планет, связанные в единую систему с наблюдениями фундаментального каталога.

3. При выборе планет следует ограничиться узкой экваториальной зоной, что сужает произвол в интерполяционных формулах систематических ошибок каталога и тем самым обеспечивает бо́льшую надежность в определении поправок элементов планет и Земли по небольшому числу оппозиций. Эксцентрицитет может быть произволен. Суточное движение желательно брать в широких пределах.

4. Необходимо особое внимание уделить организации наблюдений нижеследующих малых планет (до 11.0 величины) на светосильных меридианных кругах: 1, 2, 29, 40, 9, 7, 6, 15, 8, 11, 20, 10, 39, 3, 13, 51, 349, 16, 22, 196, 18, 14, 30. 63, 192, 511, 27, 19, 185, 354, 103, 230, 532, 287, 17, 52, 127, 12, 5, 43, 21, 28, 385, 110, 26, 451.

5. При организации фотографических наблюдений малых планет желательно привлечь к работе ряд обсерваторий (Пулково, Ташкент, Paris, Nice, Toulouse, Alger, Bordeaux, Uccle, Bonn, Heidelberg, Bergedorf, Babelsberg, Johannesburg, Zô-Sé, Hyderabad, Flagstaff, Yale и др.), полагая, что каждый астрограф в оппозицию в течение шести месяцев будет давать от пяти до восьми точных наблюдений одной планеты, надежно привязанных к системе.

6. Наиболее простым и испытанным методом построения возмущенного движения планет на период 10—20 лет является метод экстраполирования особых координат. Экстраполирование в девятом знаке через интервал 20 дней обеспечивает точность 0.02 в течение десяти лет.

7. Составление эфемерид для наблюдателей и построение точной теории движения для программных планет может взять на себя Астрономический институт в Ленинграде в кооперации с другими институтами.

Астрономический институт.
Ленинград.

Поступило
2 IV 1935.

ASTRONOMY

ON THE PROBLEM OF THE DETERMINATION OF SYSTEMATIC ERRORS OF STAR POSITIONS

By B. V. NUMEROV, Corresponding Member of the Academy

The problem of the systematic errors of star systems and, in the first place, of star declinations has not yet been solved. A comparison of series of observations made at different observatories with different instruments does not seem to afford the possibility of establishing the true system. Newcomb has proposed to utilize the observations of planets for this purpose. In fact, if perturbations in the motion of planets be neglected (for we can calculate these perturbations with any degree of accuracy), the undisturbed orbit of the planet will lie in the plane passing through the Sun's centre, and, consequently, by means of a comparison of the positions of the planet with neighbouring stars during a whole revolution of the planet, we can determine the systematic error of star declinations in the circumequatorial region. However, little attention has been paid to the possibility of using minor planets for this purpose (1). The latter have considerable advantages over major planets, as they have no discs and so can be observed as accurately as the stars.

In 1932 (2) we gave an exposition of the method and showed that we can determine with the greatest weight the coefficient a' by means of a comparison of the theory with observations of a small number of oppositions. a' is one of the coefficients included in the general formula of the systematic errors of the catalogues.

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= a + b\cos\alpha + c\sin\alpha + \ldots; \\ \Delta\delta &= a' + b'\cos\alpha + c'\sin\alpha + \ldots; \end{aligned} \tag{1}$$

i. e. we can determine the constant error of star declinations near the equator. In fact, denoting by $\varepsilon_{(\alpha)}$ and $\varepsilon_{(\delta)}$ the differences between the observed and the computed positions of planets, and taking the mean of 6 oppositions of the planet Leona for one revolution, we get the formulae:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}\sum \varepsilon_\alpha &= -1.78\,a + 0.68\,b - 0.72\,c + 0.00\,a' + 0.00\,b' + 0.00\,c'; \\ \frac{1}{6}\sum \varepsilon_\alpha &= +0.02\,a + 0.00\,b - 0.11\,c + 0.87\,a' - 0.03\,b' - 0.03\,c', \end{aligned} \tag{2}$$

which confirm the possibility of a more accurate determination of the coefficient a' and also a — the equinox corrections. We have shown further that the errors of the elements of the Earth orbit have little effect upon the mean values of the differences $\Sigma\varepsilon_3$ from several oppositions.

On the basis of these considerations we proposed a plan for the organization of observations and calculations for a small group of minor planets. We meant to concentrate our attention upon the zone near the equator (from —10 to +10°). It is reasonable to suppose, in this case, that the coefficients in formula (1) are constant quantities and do not depend on the declination. Referring to our work, Dr. Brouwer [3] in the beginning of 1935 published his plan of using minor planets for the determination of systematic errors of star positions. He proposed a different list of planets for this purpose. We were concerned with the narrow zone near the equator, while Dr. Brouwer suggests that planets with great inclinations should be used with a view to widening the zone of the determination of systematic errors. It is hardly possible to introduce the unknown coefficients of formula (1) into the equations of condition in the observations of several oppositions of planets as suggested by Dr. Brouwer, assuming different values of coefficients for individual zones of declinations. We do not agree to this extension of the plan proposed by us.

It is necessary to carry on accurate observations of the selected planets during 4—6 months about the opposition and connect them to the adopted fundamental system. One may confine oneself to one revolution of each planet, i. e. to a period of about 6 oppositions. In pursuing the observations an approximate theory of motion of the planet ought to be constructed according to the method of extrapolation of coordinates with an accuracy to the 7th decimal. This theory will permit to calculate accurate ephemerides for the use of observers and will serve as a basis for the construction of an accurate theory of motion of the planet, due regard being paid to perturbations from all major planets. Our latest investigations have shown that extrapolation in the 9th decimal and with a minimum interval of 20 days is sufficient for an accurate theory of the motion of the planet insuring the representation to 0.02 during 10 years. With a small number of oppositions we shall not have a great number of different equations of condition, therefore it is necessary to introduce, beside the unknown corrections to the 6 initial elements, 6 corrections of the Earth's elements (including the error of the unit of scale) and the correction of the Jupiter mass, i. e. a total of 13 unknowns. In solving the equations of condition for each planet separately, we shall find the residuals, which can give an idea of the systematic errors of the fundamental system of stars. The agreement in the corrections of the Earth's elements according to individual planets will confirm the necessity of revising the theory of motion of the Earth. A further discussion may point to the necessity of deducing the elements of the Earth's motion from observations and the theory of motion of minor planets alone. In this case the necessity of observing the Sun during the observation of the fundamental catalogue may be avoided, i. e. the system may be constructed on the basis of night observations of stars and of a selected group of minor planets.

One of the essential points in the organization of the work suggested is an accurate observation of minor planets in a definite system of the selected fundamental catalogue. For this purpose, the most rational method is to use meridian observations. But, unfortunately, the brightness of the minor planets does not permit to carry out observations for most minor

planets upon meridian circles. Of 48 planets, 2 are brighter than 8.0; 12 are brighter than 10.0; 21 are brighter than 10.5, and 48 planets are brighter than 11.0. Consequently, one of the principal tasks is the building of a powerful meridian circle by means of which one could observe planets up to 11.0 or at least 10.5 magnitude. A powerful meridian circle mounted in a mountainous region under conditions of the greatest transparency of the atmosphere would enable systematic observations of a few scores of minor planets in a definite system of stars to be made.*

On the other hand, the observation of minor planets may be carried on with the aid of astrographs. For this purpose, the cooperation of a great many observatories of the northern and the southern hemispheres is needed. We are of the opinion that about 15 observatories ought to participate in this work, assuming that one planet will be observed with the given instrument from 5 to 8 times. Dr Brouwer thinks the observations of 2 American observatories — Flagstaff and Yale — and the Yale Telescope in South Africa will do. Our proposal submitted to Commission 20 of the International Astronomical Union in 1932 provides for a wider cooperation, and in our opinion this will go far to ensure the success of the work.

The organization of the work falls into the following parts:

a) Observation of the planets in the system of Boss' catalogue simultaneously with the observation of new fundamental rows of stars.

b) Drawing up of normal places and discussion of systematic errors of individual observatories.

c) Ephemerides and approximate theory of planets up to 0'.5.

d) Accurate theory of motion and comparison with normal places.

Different parts of the work are to be entrusted to different observatories and institutes and ought to be published as material for further discussion, not later than a year from the completion of one revolution of the planet. The general organization of the work is to be entrusted to Comission 20 or to a special subcomission of the International Astronomical Union.

In concluding, we give the principles we are going to support in the organization and the development of the work proposed.

1. The observation of fundamental stars ought to be accompanied by observations of minor planets instead or simultaneously with the observation of the Sun or major planets.

2. Owing to the difficulty of a strict adherence to one system, the reduction of long series of old observations of minor planets will yield less valuable results than specially instituted new series of observations of planets, connected with observations of the fundamental catalogue so as to form a unified system.

3. When selecting the planets, it is necessary to confine oneself to a narrow equatorial zone, which will limit the arbitrariness in the interpolation formulae of systematic errors of the catalogue and thus insure a greater reliability in the determination of corrections of the planets' and Earth's elements from a small number of oppositions. The eccentricity may be arbitrary. The diurnal motion should be taken within wide limits.

4. Special attention should be paid to observations of minor planets (up to 11.0 mag.) with powerful meridian circles, according to the list:

* The problem of designing a powerful meridian instrument is being tackled by the Astronomical Institute of Leningrad in collaboration with the Mountain Observatory of Abastuman. Preliminary considerations on this line will be published in the nearest future.

4, 1, 2, 29, 40, 9, 7, 6, 15, 8, 11, 20, 10, 39, 3, 13, 51, 349, 16, 22, 196, 18, 14, 30, 63, 192, 511, 27, 19, 185, 354, 103, 230, 532, 287, 17, 52, 127, 12, 5, 43, 21, 28, 385, 110, 26, 451.

5. It is desirable to secure the cooperation of the following observatories in photographic observations of the motion of minor planets: Pulkovo, Tashkent, Paris, Nice, Toulouse, Alger, Bordeaux, Catania, Uccle, Heidelberg, Bergedorf, Babelsberg, Johannesburg, Zô-Sé, Hyderabad, Flagstaff, Yale, etc. (assuming that during 6 months each astrograph in the opposition will give from 5 to 8 accurate observations of a planet, reliably connected to the system).

6. The simplest and most efficient method of constructing the perturbed motion of planets for a period of 10—20 years is that of extrapolation in special coordinates. The extrapolation in the 9th decimal every 20 days insures an accuracy of 0.02 during 10 years.

7. The drawing up of special ephemerides for the use of observers and the construction of an accurate theory of motion for program planets may be undertaken by the Leningrad Astronomical Institute in cooperation with other institutions.

Astronomical Institute.
Leningrad.

Received
2. IV. 1935.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — REFERENCES

[1] Voronov, Astronomische Nachrichten, № 6092—93, 1934. [2] Нумеров, Бюллетень Астрономического института, № 32, 1932. [3] Brouwer, Astronomical Journal, № 1022, 1934.

ГЕОДЕЗИЯ

Д. Н. ХРАМОВ

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ АНОМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ВЕРТИКАЛЬНОГО ГРАДИЕНТА СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ПО АНОМАЛИЯМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

(*Представлено академиком А. Н. Крыловым 28 III 1935*)

1. Б. В. Нумеров в ряде работ ([1]) вывел формулы, выражающие аномальные значения первых и вторых производных гравитационного потенциала через аномалии силы тяжести для случая плоской Земли, и указал пути для практического применения этих формул. Им же справедливо обращено внимание на особую важность знания аномальных значений $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ для правильной редукции наблюденных значений силы тяжести к геоиду. Задачей настоящей заметки является вывод формулы, выражающей $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ через аномалии силы тяжести для сферической Земли и сравнение ее с аналогичной формулой Нумерова.

2. Аномальный потенциал в некоторой точке P сферы радиуса R может быть, как известно, представлен в виде интеграла по сфере радиуса 1:

$$V = \frac{R}{4\pi} \int (\Delta g - \Delta g_0) S(\psi)\, d\sigma, \qquad (1)$$

где Δg_0 — аномалия силы тяжести в ауфпункте P, Δg — аномалия в некоторой переменной точке, сферическое расстояние которой от P равно ψ, а

$$S(\psi) = \operatorname{cosec}\frac{\psi}{2} + 1 - 5\cos\psi - 6\sin\frac{\psi}{2} - 3\cos\psi \lg\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right)$$

есть функция Стокса.

Дифференцируя (1) два раза по x и опуская интегралы

$$\int S d\sigma \text{ и } \int \frac{\partial S}{\partial x} d\sigma,$$

равные нулю, получим:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{R}{4\pi}\int (\Delta g - \Delta g_0)\left[\frac{d^2 S}{d\psi^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \frac{dS}{d\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right] d\sigma.$$

Аналогично этому

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{R}{4\pi}\int (\Delta g - \Delta g_0)\left[\frac{d^2 S}{d\psi^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \frac{dS}{d\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right] d\sigma.$$

И, имея в виду уравнение Лапласа,

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{R}{4\pi}\int (\Delta g - \Delta g_0)\left\{\frac{d^2 S}{d\psi^2}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{dS}{d\psi}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right]\right\} d\sigma. \quad (2)$$

Проведем через точку P две взаимно перпендикулярные дуги больших кругов P_ξ и P_η (см. фиг. 1) и направим оси координат x и y по касательным к этим дугам в точке P в стороны, противоположные ξ и η; ось z в этом случае будет направлена по нормали к сфере. Возьмем некоторую точку M, расстояние которой от P равно ψ, и опустим из нее сферические перпендикуляры MX и MY на P_ξ и P_η. Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial k}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial l}. \quad (3)$$

Из прямоугольного сферического треугольника PXM имеем

$$\cos\psi = \cos k \cos p, \quad (4)$$

$$\sin\psi\cos\alpha = \sin k\cos p. \quad (5)$$

Дифференцируя (4) по k, получаем

$$\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial k} = \sin k\cos p, \quad (6)$$

или, имея в виду (5),

$$\frac{\partial\psi}{\partial k} = \cos\alpha. \quad (7)$$

Дифференцируя (6) и используя (4) и (7), найдем

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial k^2} = \operatorname{ctg}\psi\sin^2\alpha. \quad (8)$$

Из треугольника PMY аналогичным образом найдем

$$\frac{\partial\psi}{\partial l} = \sin\alpha, \quad (7')$$

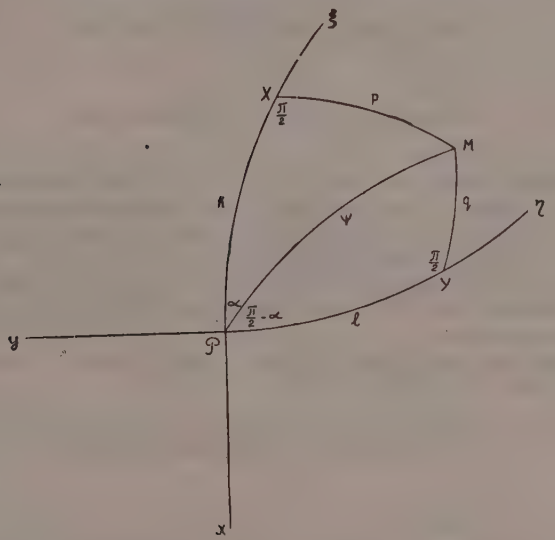
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial l^2} = \operatorname{ctg}\psi\cos^2\alpha. \quad (8')$$

Имея в виду (3), получим

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2=\frac{1}{R^2}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial k}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial l}\right)^2\right]=\frac{1}{R^2},$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\frac{1}{R^2}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial k^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial l^2}\right]=\frac{1}{R^2}\operatorname{ctg}\psi$$

и, подставляя полученные результаты в (2),

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\frac{1}{4\pi R}\int\Delta g-\Delta g_0)\left[\frac{d^2S}{d\psi^2}+\frac{dS}{d\psi}\operatorname{ctg}\psi\right]d\sigma,$$



или, положив $d\sigma=\sin\psi d\psi d\alpha$,

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi}d\alpha\int_0^{\pi}(\Delta g-\Delta g_0)\,\Theta(\psi)\,d\psi, \tag{9}$$

где

$$\Theta(\psi)=\frac{1}{2}\sin\psi\left[\frac{d^2S}{d\psi^2}+\frac{dS}{d\psi}\operatorname{ctg}\psi\right]=\cos\frac{\psi}{2}\left[\frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2\frac{\psi}{2}-2+19\sin\frac{\psi}{2}+\right.$$
$$\left.+12\sin^2\frac{\psi}{2}-38\sin^3\frac{\psi}{2}+6\sin\frac{\psi}{2}\left(1-2\sin^2\frac{\psi}{2}\right)\lg\left(\sin\frac{\psi}{2}+\sin^2\frac{\psi}{2}\right)\right].$$

3. Мы вывели формулу (9), выражающую $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ через аномалии силы тяжести для случая сферической Земли.

Формула

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\alpha\int_0^{\infty}\frac{\Delta g-\Delta g_0}{r^2}\,dr, \tag{10}$$

выведенная Нумеровым для плоской Земли, может рассматриваться как первое приближение к формуле (9). Оценим точность этого приближения.

Введем в (9) переменную интегрирования $u = \sin\frac{\psi}{2}$ и перепишем ее в виде

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^1 \frac{\Delta g - \Delta g_0}{2u^2}\, du + \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^1 (\Delta g - \Delta g_0)\, W(u)\, du, \quad (11)$$

где

$$W(u) = -4 + 38 + 24u^2 - 76u^3 + 12u(1 - 2u^2)\lg(u + u^2).$$

Введем в первом члене (11) в качестве переменной интегрирования линейное расстояние от ауфпункта $r = 2uR$. Тогда

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{2R} \frac{\Delta g - \Delta g_0}{r^2}\, dr + K, \quad (12)$$

где

$$K = \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi} d\alpha \int_\pi^1 (\Delta g - \Delta g_0)\, W(u)\, du. \quad (13)$$

Мы видим, что первый член полученной нами формулы (12) совпадает с правой частью формулы Нумерова.* Оценив величину остаточного члена K, мы определим ошибку, которую мы допустим, пользуясь формулой Нумерова вместо выведенной нами формулы (9).

Нетрудно убедиться, что функция $W(u)$ имеет два корня $u_1 \approx 0.179$ и $u_2 \approx 0.820$. Заметим, что $W(u)$ положительна внутри интервала (u_1, u_2) и отрицательна вне его.

Положим, для простоты, в (13) $\Delta g - \Delta g_0 = c$, где c — постоянная и заменим $W(u)$ на $|W(u)|$. Тогда

$$\frac{KR}{c} = \int_0^1 |W(u)|\, du = -2P(u_1) + 2P(u_2) - P(1),$$

где

$$P(u) = \int_0^u W(u)\, du = -4u + 16u^2 + 6u^3 - 16u^4 + 6(u^2 - u^4)\lg(u + u^2).$$

Подсчет дает $P(u_1) = -0.475$; $P(u_2) = +4.082$; $P(1) = 2$, откуда

$$\frac{KR}{c} = 7.11$$

и, полагая $R = 6.38 \times 10^8$ и $c = 0.350$ [наибольшая известная аномалия (2)], $K = 3.9 \times 10^{-9}$.

Учитывая, что эта величина получена нами при самых крайних предположениях, мы вправе считать, что, пользуясь формулой Нумерова, т. е. пренебрегая величиной K в (12), мы допускаем незначительную ошибку, которая, как правило, меньше 1×10^{-9}.

Астрономический институт.
Ленинград.

Поступило
28 III 1935.

---

* Разность пределов интегрирования ($2R$ и ∞) не играет практически никакой роли; достаточно указать, что

$$\int_{2R}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2R} = 0.8 \times 10^{-9}.$$

ÜBER DIE BESTIMMUNG DER ANOMALIEWERTE DES VERTIKALGRADIENTEN DER SCHWERKRAFT AUS DEN SCHWEREANOMALIEN

Von D. N. CHRAMOV

(*Vorgelegt von A. N. Krylov, Mitglied der Akademie, d. 28. III. 1935*)

In einer Reihe von Abhandlungen (1) hat B. Numerov Formeln abgeleitet, welche die Anomaliewerte der ersten und zweiten Ableitungen des Schwerepotentials durch Schwereanomalien für den Fall der ebenen Erde ausdrücken. Er hat auch den Weg zur praktischen Anwendung dieser Formeln gewiesen und auf die besondere Wichtigkeit der Kenntnis der Anomaliewerte der Ableitung $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ für die fehlerfreie Reduktion der beobachteten Schwerewerte auf das Geoid aufmerksam gemacht.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist eine Formel abzuleiten, die $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ durch die Schwereanomalien für die sphärische Erde ausdrückt, und diese Formel mit der entsprechenden Formel von Numerov zu vergleichen.

2. Das Anomaliepotential in einem Punkt P der Sphäre von Radius R kann, bekanntlich, in der Form eines Integrals über einer Sphäre des Radius 1 dargestellt werden:

$$V = \frac{R}{4\pi} \int (\Delta g - \Delta g_0) S(\psi) \, d\sigma, \tag{1}$$

wo Δg_0 — die Schwereanomalie im Aufpunkt P, Δg — die Anomalie in einem veränderlichen Punkte, dessen sphärischer Abstand von P gleich ψ ist und

$$S(\psi) = \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos \psi - 6 \sin \frac{\psi}{2} - 3 \cos \psi \lg \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right)$$

die Stokes'sche Funktion ist.

Indem wir (1) zweimal nach x differenzieren und die der Null gleichen Integrale $\int S d\sigma$ und $\int \frac{\partial S}{\partial x} d\sigma$ weglassen, erhalten wir

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{R}{4\pi} \int (\Delta g - \Delta g_0) \left[\frac{d^2 S}{d\psi^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \frac{dS}{d\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right] d\sigma.$$

Ähnlich ist

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{R}{4\pi} \int (\Delta g - \Delta g_0) \left[\frac{d^2 S}{d\psi^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \frac{dS}{d\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] d\sigma$$

und, wenn wir die Laplace'sche Gleichung in Betracht ziehen,

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{R}{4\pi} \int (\Delta g - \Delta g_0) \left\{ \frac{d^2 S}{d\psi^2} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{dS}{d\psi} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] \right\} d\sigma. \tag{2}$$

Wollen wir durch den Punkt P zwei zueinander senkrechte Bogen der grossen Kreise P_ξ und P_η (s. Abb.) ziehen und die Koordinatenachsen x und y mit den Tangenten zu der Sphäre im Punkt P zusammenfallen lassen, indem wir innen ξ und η entgegengesetzte Richtungen zuschreiben. Die z-Achse wird in diesem Fall in der Richtung der Normale liegen.

Betrachten wir nun einen beliebigen Punkt, dessen Abstand von P gleich ψ ist und fällen von diesem Punkt aus die sphärischen Senkrechten MX und MY auf P_ξ und P_η. Beachten wir, dass

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial k}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial l}. \tag{3}$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck PXM haben wir

$$\cos\psi = \cos k \cos p, \tag{4}$$
$$\sin\psi \cos\alpha = \sin k \cos p. \tag{5}$$

Indem wir (4) nach k differenzieren, erhalten wir

$$\sin\psi \frac{\partial\psi}{\partial k} = \sin k \cos p, \tag{6}$$

oder bei Berücksichtigung von (5)

$$\frac{\partial\psi}{\partial k} = \cos\alpha. \tag{7}$$

Indem wir (6) differenzieren und (4) und (7) verwenden, finden wir

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial k^2} = \operatorname{ctg}\psi \sin^2\alpha. \tag{8}$$

Auf ähnliche Weise finden wir aus dem Dreieck PYM

$$\frac{\partial\psi}{\partial l} = \sin\alpha, \tag{7'}$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial l^2} = \operatorname{ctg}\psi \cos^2\alpha. \tag{8'}$$

Bei Berücksichtigung von (3) erhalten wir

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{R^2}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial k}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial l}\right)^2\right] = \frac{1}{R^2},$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \frac{1}{R^2}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial k^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial l^2}\right] = \frac{1}{R^2}\operatorname{ctg}\psi$$

und, indem wir die gewonnenen Ergebnisse in (2) einsetzen,

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{1}{4\pi R}\int (\Delta g - \Delta g_0)\left[\frac{d^2 S}{d\psi^2} + \frac{dS}{d\psi}\operatorname{ctg}\psi\right] d\sigma,$$

oder, indem wir $d\sigma = \sin\psi d\psi d\alpha$ setzen,

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{1}{4\pi R}\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} (\Delta g - \Delta g_0)\,\Theta(\psi)\, d\psi, \tag{9}$$

wobei

$$\Theta(\psi) = \frac{1}{2}\sin\psi\left[\frac{d^2 S}{d\psi^2} + \frac{dS}{d\psi}\operatorname{ctg}\psi\right] = \cos\frac{\psi}{2}\left[\frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2\frac{\psi}{2} - 2 + 19\sin^2\frac{\psi}{2} + \right.$$
$$\left. + 12\sin^2\frac{\psi}{2} - 38\sin^3\frac{\psi}{2} + 6\sin\frac{\psi}{2}\left(1 - 2\sin^2\frac{\psi}{2}\right)\lg\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right)\right].$$

3. Wir haben die Formel (9) abgeleitet, die $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ durch die Schwereanomalien für den Fall der sphärischen Erde ausdrückt. Die Formel

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\infty} \frac{\Delta g - \Delta g_0}{r^2}\, dr, \tag{10}$$

die Numerov für die ebene Erde abgeleitet hat, kann als erste Näherung zur Formel (9) betrachtet werden. Wollen wir die Genauigkeit dieser Näherung prüfen.

Wir führen in (9) die Integrationsveränderliche $u = \sin\frac{\psi}{2}$ ein und schreiben diese Formel in der Form um

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^1 \frac{\Delta g - \Delta g_0}{2u^2}\, du + \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^1 (\Delta g - \Delta g_0)\, W(u)\, du, \quad (11)$$

wo

$$W(u) = -4 + 38u + 24u^2 - 76u^3 + 12u(1 - 2u^2)\lg(u + u^2).$$

Führen wir im ersten Glied (11) als Integrationsveränderliche den linearen Abstand vom Aufpunkt $r = 2uR$ ein. Dann ist

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{2R} \frac{\Delta g - \Delta g_0}{r^2}\, dr + K, \quad (12)$$

wobei

$$K = \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^1 (\Delta g - \Delta g_0)\, W(u)\, du. \quad (13)$$

Wir sehen, dass das erste Glied der oben erhaltenen Formel mit der rechten Seite der Numerov'schen Formel zusammenfällt.* Indem wir den Wert des Restgliedes K feststellen, bestimmen wir den Fehler, den wir begehen, wenn wir statt der von uns abgeleiteten Formel (9) die Numerov'sche anwenden.

Es ist leicht ersichtlich, dass die Funktion $W(u)$ zwei Wurzeln $u_1 \approx 0.179$ und $u_2 \approx 0.820$ hat. Beachten wir, dass $W(u)$ innerhalb des Intervalls (u_1, u_2) positiv und ausserhalb desselben negativ ist.

Der Einfachheit halber setzen wir in (13) $\Delta g - \Delta g_0 = c$, wo c eine Konstante ist und ersetzen $W(u)$ durch $|W(u)|$. Dann ist

$$\frac{KR}{c} = \int_0^1 |W(u)|\, du = -2P(u_1) + 2P(u_2) - P(1),$$

wobei

$$P(u) = \int_0^u W(u)\, du = -4u + 16u^2 + 6u^3 - 16u^4 + 6(u^2 - u^4)\lg(u + u^2).$$

Die Berechnung ergibt $P(u_1) = -0.475$; $P(u_2) = +4.082$; $P(1) = 2$, woraus $\frac{KR}{c} = 7.11$ und, indem wir $R = 6.38 \times 10^8$ und $c = 0.350$ [die grösste bekannte Anomalie (²)] setzen, ist $K = 3.9 \times 10^{-9}$.

* Die Differenz zwischen den Integrationsgrenzen ($2R$ und ∞) spielt praktisch keine Rolle. Es ist hinreichend anzudeuten, dass

$$\int_{2R}^{\infty} \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{2R} = 0.8 \times 10^{-9}.$$

ist.

Da wir diesen Wert bei extremen Annahmen ermittelt haben, halten wir uns für berechtigt zu sagen, dass bei Anwendung der Numerov'schen Formel, d. h. bei Nichtberücksichtigung der Grösse K in (12), wir nur einen unbedeutenden Fehler zulassen, der in der Regel geringer als 1×10^{-9} ist.

Astronomisches Institut.
Leningrad.

Eingegangen
d. 28. III. 1935.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITERATUR

[1] Б. В. Нумеров, ДАН, 1929, № 4; 1935, т. I, № 1. B. Numerov, C. R. Acad. Sci. URSS, 1929, № 4; 1935, v. I, № 1. — B. Numerov, ZS. f. Geophysik, 5, H. 2. — Б. В. Нумеров, Бюлл. Астр. инст., 1933, № 34. B. Numerov, Bull. Inst. Astr., Leningrad, 1933, № 34. [2] A. Berroth. Schweremessungen. Handb. d. Phys., Bd. II.

ФИЗИКА

Е. М. БРУМБЕРГ

НОВЫЙ МЕТОД МОНОХРОМАТИЗАЦИИ СВЕТА

(*Представлено академиком С. И. Вавиловым 3 IV 1935*)

Полное внутреннее отражение на границе стекла с воздухом было впервые применено И. Ньютоном [1] для разделения белого солнечного светового пучка на две части дополнительного спектрального состава. Метод Ньютона, пригодный в первоначальной форме только для спектрального разделения вполне определенного типа, может быть, однако, обобщен и сделан универсальным, если границу раздела между стеклом и воздухом заменить границей между другим прозрачным твердым веществом и жидкостью. Рассмотрим следующую конструкцию светофильтра нового типа: между двумя прямоугольными призмами (например, из кварца) помещается слой жидкости с подходящей дисперсией. На призму падает луч под углом i (фиг. 1), угол преломления пусть будет φ; для небольших углов падения

$$\varphi = \frac{i}{f_1(\lambda)}, \tag{1}$$

где $f_1(\lambda)$ — показатель преломления материала призмы для данной волны λ. Угол падения на грань между призмой и жидкостью будет очевидно

$$\frac{\pi}{2} - (\varphi + \alpha_0).$$

Обозначим показатель преломления жидкости через $f_2(\lambda)$, в таком случае условие полного внутреннего отражения выразится так:

$$\cos(\alpha_0 \pm \varphi) \geqslant \frac{f_2(\lambda)}{f_1(\lambda)}. \tag{2}$$

Начиная с определенной λ, зависящей от $\frac{f_2(\lambda)}{f_1(\lambda)}$, от i и от α_0, свет не будет проходить через систему призм, испытывая полное внутреннее отражение; пучок света разделится, причем в зависимости от подбора $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$

проходить насквозь будет только длинноволновая или наоборот коротковолновая часть спектра. Длина волны, для которой отношение

$$\frac{f_2(\lambda)}{f_1(\lambda)}=1, \qquad (3)$$

проходит через систему свободно, как через сплошное однородное тело при любых значениях i. Чем круче ход функции $\frac{f_2(\lambda)}{f_1(\lambda)}$, тем резче будет граница, разделяющая отраженный свет от проходящего. В опыте Ньютона

$$\varphi=0, \quad \alpha=\frac{\pi}{4}, \quad f_2(\lambda)\sim 1,$$

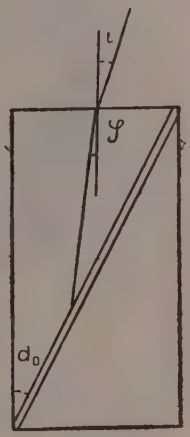
т. е. условие (2) имело чрезвычайно ограниченный характер

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\geqslant\frac{1}{f_1(\lambda)}. \qquad (4)$$

В рассматриваемой схеме принципиально ограничений нет, и спектр может быть разделен в любой его части.

После монохроматизации ($2i$) для участка длин волн $\lambda_1-\lambda_2$, т. е. угол, в пределах которого свободно проходит λ_2 [условие (3)] и не проходит λ_1 для призмы с наивыгоднейшим значением α, определяется равенством

$$\sin i=\sqrt{\frac{f_1(\lambda)(f_1(\lambda)+f_2(\lambda))}{2}}. \qquad (5)$$



Фиг. 1. — Abb. 1.

В случае некоторых комбинаций веществ, например, кварц-сильвин, кварц-сероуглерод, при выделении участков в 100—150 Å поле монохроматизации достигает 35—40°.

Описанный принцип был применен для выделения узких спектральных участков в ультрафиолетовой области, где большинство жидкостей вблизи полос поглощения обладает весьма благоприятным ходом дисперсии. Призма была изготовлена из кристаллического кварца, вырезанного перпендикулярно оси. В качестве жидкости брались растворы различных солей. На фиг. 2 и 3 приведены образцы спектрограмм.

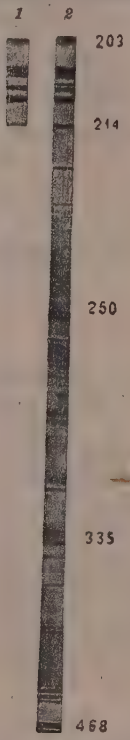
Правая граница выделяемого участка определяется поглощением жидкости. Примененные жидкости выбраны совершенно случайно, так как дисперсия в ультрафиолетовой области обследована лишь для немногих веществ.

Фильтр может быть также осуществлен в виде сосуда с жидкостью, в которую погружена под известным углом кварцевая пластина или же две пластины с прослойкой из вещества с подходящей дисперсией, в виде прямоугольной призмы полного внутреннего отражения, где граница с воздухом заменяется границей с жидкостью, или наконец в виде призмы Дове. Выбор конструкции в каждом случае определяется дисперсией примененных веществ. Нами строится в настоящее время светофильтр по типу призмы Дове из сильвина и кварца, предназначаемый для выделения области 2000—1800 Å (2).

Выделение весьма узких участков может быть осуществлено посредством комбинации из двух светофильтров, поставленных один за другим, обрезающих спектр с разных концов. Для изменения коротковолновой

границы не трудно подобрать абсорбционные фильтры. В параллельном пучке вблизи резкой полосы поглощения жидкостью, заполняющей зазор между призмами, можно с небольшими потерями выделить участок в десятки Å (фиг. 4).

Фиг. 2. *1* — спектр ртутной дуги; *2* — участок, выделяемый фильтром кварц—раствор CdJ_2; *3* — кварц — раствор KJ; *4* — кварц — соляная кислота.
Abb. 2. *1* — Spektrum eines Quecksilberbogens; *2*—ein durch einen Lichtfilter aus Quarz und CdJ_2-Lösung ausgeschiedener Teil des Spektrums; *3*—Quarz—KJ-Lösung; *4* — Quarz — Salzsäure.



Фиг. 3. *1* — спектр цинковой искры: *2* — участок, пропускаемый фильтром кварц — раствор NaCl.
Abb. 3. *1* — Zinkfunkenspektrum; *2* — ein durch einen Lichtfilter aus Quarz und NaCl-Lösung durchgelassener Teil des Spektrums.

Фиг. 4. — Abb. 4.

Описанный способ монохроматизации света окажется, очевидно, особенно полезным для выделения узких участков в ультрафиолетовом спектре. Он отличается от способа Христиансена большой светосилой устройства (широкое поле) и малым влиянием температурных условий.* Кроме того призменный светофильтр не искажает изображения источника света и не требует особой вспомогательной оптики.

В заключение выражаю глубокую благодарность акад. С. И. Вавилову за внимание к настоящей работе и постоянную помощь.

Государственный оптический институт.
Ленинград.

Поступило
3 IV 1935.

* Сильная зависимость от температуры в фильтре Христиансена определяется малым углом между кривыми дисперсии.

PHYSIK

NEUE MONOCHROMATISIERURGSMETHODE DES LICHTES

Von E. M. BRUMBERG

(*Vorgelegt von S. I. Wawilow, Mitglied der Akademie, d. 3. IV. 1935*)

Die totale Reflexion an der Grenzfläche von Glas und Luft wurde zuerst von I. Newton [1] angewandt um einen weissen Sonnenlichtstrahlenbüschel in zwei Teile von komplementärer Spektralzusammensetzung zu zerlegen. Die Newtonsche Methode, die sich in ihrer ursprünglichen Form nur für eine spektrale Scheidung ganz bestimmter Art eignet, kann jedoch verallgemeinert und zu einer universellen gestaltet werden, wenn man die Grenzfläche zwischen Glas und Luft durch eine solche zwischen einem anderen durchsichtigen festen Stoff und einer Flüssigkeit ersetzt. Betrachten wir folgende Konstruktion eines neugearteten Lichtfilters (Fig. 1): zwischen zwei rechtwinklige Prismen (z. B. aus Quarz) bringt man eine Flüssigkeitsschicht von geeigneter Dispersion. Auf das Prisma fällt ein Strahl unter dem Winkel i (Fig. 1); der Brechungswinkel möge φ sein. Für kleine Einfallswinkel gilt

$$\varphi = \frac{i}{f_1(\lambda)} \qquad (1)$$

wo $f_1(\lambda)$ der Brechungsexponent des Prismenmaterials für die betreffende Wellenlänge ist. Der Einfallswinkel auf die zwischen Prisma und Flüssigkeit liegende Fläche ist offenbar

$$\frac{\pi}{2} - (\varphi + \alpha_0).$$

Es sei der Brechungsexponent der Flüssigkeit $f_2(\lambda)$. Dann lässt sich die Bedingung für eine totale Reflexion folgendermassen ausdrücken:

$$\cos(\alpha_0 \pm \varphi) \geqslant \frac{f_2(\lambda)}{f_1(\lambda)}. \qquad (2)$$

Beginnend mit einer bestimmten Wellenlänge λ, die von dem Verhältnis $\frac{f_2(\lambda)}{f_1(\lambda)}$, sowie auch von i und α abhängt, geht das Licht nicht mehr durch das Prismensystem hindurch, sondern erfährt eine totale Reflexion; das Strahlenbündel löst sich in zwei Teile auf, wobei man je nach Wahl der Werte für $f_1(\lambda)$ und $f_2(\lambda)$ ein Durchdringen entweder nur des langwelligen oder aber nur des kurzwelligen Teiles des Spektrums erzielen kann. Diejenige Wellenlänge, die der Bedingung

$$\frac{f_2(\lambda)}{f_1(\lambda)} = 1 \qquad (3)$$

genügt, geht bei beliebigen Werten von i frei durch das System, wie durch einen durchweg homogenen Körper. Je steiler der Verlauf der Funktion $\frac{f_2(\lambda)}{f_1(\lambda)}$, umso schärfer ist die Grenze zwischen dem reflektierten und dem durchdringenden Licht ausgeprägt. Im Newtonschen Versuch war

$$\varphi = 0, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}, \quad f_2(\lambda) \sim 1,$$

d. h. die Bedingung (2) hatte einen sehr beschränkten Charakter, nämlich

$$\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \geqslant \frac{\lambda}{f_1(\lambda)} \qquad (4)$$

erhalten. Das vorliegende Schema impliziert im Prinzip keinerlei Beschränkungen und das Spektrum kann in einem beliebigen Bereich zerlegt werden.

Das Monochromatisierungsfeld ($2i$) für den Bereich der Wellenlängen von $\lambda_1 - \lambda_2$, d. h. derjenige Winkel, innerhalb dessen bei einem Prisma mit vorteilhaftestem α-Wert λ_2 frei [Bedingung (3)] und λ_1 nicht durchgeht, wird durch die Gleichung

$$\sin i = \sqrt{\frac{f_1(\lambda)(f_1(\lambda) + f_2(\lambda))}{2}} \qquad (5)$$

bestimmt. Mit gewissen Kombinationen von Stoffen, z. B. Quarz-Sylvin, Quarz-Schwefelkohlenstoff erreicht das Monochromatisierungsfeld bei Ausscheidung eines Spektralbereichs von 100—150 Å einen Winkel von 35—40°.

Das beschriebene Prinzip wurde zur Absonderung von schmalen Spektralbereichen im ultravioletten Teil des Spektrums verwandt, in welchem die meisten Flüssigkeiten einen recht günstigen Dispensionsverlauf in der Nähe der Absorptionsstreifen aufweisen. Das Prisma war aus kristallinischem, senkrecht zur Achse ausgesägtem Quarz hergestellt. Als Flüssigkeiten dienten Lösungen verschiedener Salze. In Abb. 2 und 3 sind entsprechende Spektrogramme wiedergegeben.

Die rechte Grenze des ausgeschiedenen Teiles ist durch die Absorption der Flüssigkeit bedingt. Die angewandten Flüssigkeiten wurden ganz zufällig gewählt, da die Dispersion im ultravioletten Bereich nur für wenige Substanzen untersucht ist.

Der Filter kann auch in Form eines Gefässes mit Flüssigkeit ausgeführt werden, in welche ein Quarzplättchen oder zwei Plättchen nebst Zwischenschicht aus einem Stoff von geeigneter Dispersion unter einem gewissen Winkel getaucht sind, wobei letztere Plättchen die Form eines Prismas mit totaler Reflexion, bei welchem die Grenzfläche Prisma-Luft durch eine solche von Prisma-Flüssigkeit ersetzt wird, oder aber die Form eines Doweschen Prismas besitzen. Die Wahl der Konstruktion ist in einem jeden Fall durch die Dispersion der angewandten Stoffe bedingt. Wir konstruieren gegenwärtig einen Lichtfilter vom Typ des Doweschen Prismas aus Sylvin und Quarz, welcher für die Ausscheidung des Spektralgebiets von 2000—1800 Å bestimmt ist (²).

Die Absonderung recht schmaler Spektrumteile lässt sich durch eine Kombination aus zwei hintereinander gestellten Lichtfiltern ausführen, wobei diese das Spektrum von den entgegengesetzten Seiten abschneiden. Die kurzwelligen Teile des durchgelassenen Spektrums lassen sich leicht durch die Absorption in den betreffenden Flüssigkeiten beseitigen. In einem parallelen Bündel in der Nähe eines scharfen Absorptionsstreifens (wobei die Absorption durch eine den Raum zwischen den beiden Prismen ausfüllende Flüssigkeit erzielt wird) kann man unter geringen Verlusten ein Spektralgebiet von etwa 20 Å ausscheiden.

Die beschriebene Monochromatisierungsmethode dürfte sich besonders für Ausscheidung schmaler Gebiete im ultravioletten Teil des Spektrums als nützlich erweisen. Sie unterscheidet sich vom Verfahren nach Christiansen durch grosse Lichtstärke der Anordnung aus (breites Feld)

und durch geringe Beeinflussung von den Temperaturverhältnissen .* Ausserdem wird durch den Prismenlichtfilter die Abbildung der Lichtquelle nicht verzerrt; auch bedarf es keiner besonderen optischen Hilfs vorkehrungen.

Zum Schluss spreche ich dem Mitglied der Akademie der Wissenschaften S. I. Wawilow für seine Aufmerksamkeit und die unermüdliche Hilfe, die er mir bei Ausführung der vorliegenden Arbeit zuteil werden liess, meinen tiefsten Dank aus.

Optisches Institut.
Leningrad.

Eingegangen
d. 3. IV. 1935.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITERATUR

[1] И. Ньютон. Оптика, кн. 1, стр. 52. [2] A. Kublitzky, Ann. d. Phys., 20, 793, 1934.

ФИЗИКА

В. ФРЕДЕРИКС, Г. МИХАЙЛОВ и Д. ВЕНЕШЕВИЧ

О ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОТЕРЯХ В АНИЗОТРОПНОЙ ЖИДКОСТИ

(*Представлено академиком А. Ф. Иоффе 1 IV 1935*)

В анизотропной жидкости (*p*-azoxyanisol) Кастом и Орнштейном (1) был обнаружен максимум потерь при $t = 122°$ C и частоте $\nu = 3.2 \cdot 10^5$ герц. При повышении температуры на 2° C этот максимум сместился к частоте $1.5 \cdot 10^6$ герц, т. е. была установлена сильная зависимость положения максимума потерь от температуры.

Кроме того Кастом (2) было произведено исследование поведения анизотропной жидкости в переменном электрическом поле снятием рентгенограмм методом Дебая. При температуре 122° и частотах ниже $3 \cdot 10^5$ герц рентгенограммы указывали на преимущественное расположение молекул своими длинными осями вдоль поля. При $\nu = 3 \cdot 10^5$ герц какая бы то ни было ориентация молекул исчезала, и рентгенограмма представляла одно диффузное кольцо. При частоте в $6 \cdot 10^5$ герц была обнаружена ориентация молекул длинными осями перпендикулярно полю. Указанные авторы находят в этих экспериментах подтверждение своей гипотезы существования в анизотропной жидкости молекулярных роев.

Аномалия хода диэлектрических потерь, как известно из теории Дебая, должна быть связана с аномальным ходом диэлектрической постоянной ε по частоте и температуре.

Однако, Эррера (3) произвел измерение ε параазоксианизола в диапазоне частот 10^6 до 400 герц и аномального хода не обнаружил. Это обстоятельство чрезвычайно осложнило Касту и Орнштейну объяснение их результатов с потерями. Германом (4) было предложено иное объяснение рентгенограмм Каста, именно, что ориентация молекул вдоль поля вызывается движением ионов в жидкости, которое с увеличением частоты ослабевает

* Die starke Abhängigkeit von der Temperatur ist im Filter nach Christiansen durch den kleinen Winkel zwischen den Dispersionskurven bedingt.

и при $\nu = 3 \cdot 10^5$ герц, когда путь иона становится сравнимым с длиной молекулы, вовсе теряет свое ориентирующее действие. Наступающая при дальнейшем повышении частоты ориентация перпендикулярно полю может быть вызвана расположением дипольного момента молекулы нормально к длине или анизотропией молекулы.

Настоящая работа была предпринята с целью воспроизвести результаты Каста и связать их с движением анизотропной жидкости при прохождении тока.

Измерение диэлектрических потерь производилось в резонансном контуре методом замещения конденсатора с исследуемой жидкостью конденсатором равной емкости C с последовательно приключенным к нему сопротивлением r.

Амплитуда переменного тока в контуре соответствовала отклонению гальванометра, приключенного к вакуумному термоэлементу. Последний находился в цепи апериодического контура, слабо связанного с резонатором.

Уравниванием отклонений гальванометра, при замещении одного конденсатора другим, путем подбора соответствующего сопротивления r достигалось равенство углов потерь обоих конденсаторов. $\operatorname{tg}\delta$ жидкости равнялся, таким образом, произведению ωCr, где все величины были известны.

$\operatorname{Tg}\delta$ эталонного конденсатора был предварительно измерен и оказался несравнимо меньше $\operatorname{tg}\delta$ конденсатора с параазоксианизолом в жидком состоянии.

Относительная ошибка измерения таким методом составляла от 2% при коротких волнах до 3% при длинных.

Устройство конденсатора с жидкостью и установка для нагревания и поддержания температуры описаны нами в предыдущей работе (5).

Измерение $\operatorname{tg}\delta$ с температурой при разных частотах дали ход, указанный в табл. 1, для частот $3 \cdot 10^5$ и $6 \cdot 10^5$ герц. Максимума потерь ни при какой частоте обнаружить не удалось. Кривые с достаточной степенью точности следуют уравнению:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{k}{1 - \alpha t}.$$

Следует заметить, что коэффициент α в этой формуле меняется в зависимости от того, в сторону уменьшения или увеличения температур производятся измерения и была ли жидкость непосредственно перед измерениями переведена в изотропную фазу.

Приведенные измерения сделаны при понижающейся со 138—140° C (изотропная фаза) температуре.

Ход $\operatorname{tg}\delta$ с частотой представлен в табл. 2. Зависимость может быть выражена уравнением $\operatorname{tg}\delta = \frac{1}{\nu}$, причем при разных температурах этот ход сохраняется.

В предыдущей работе (5) нами было высказано предположение, что уменьшение проводимости с увеличением поля связано с движением жидкости при прохождении тока. Поэтому нам казалось, что и в случае переменных полей движение даст характерное уменьшение проводимости с увеличением поля.

С этой целью при разных частотах нами был снят ход $\operatorname{tg}\delta$ с изменением амплитуды переменного поля данной частоты. Результаты представлены в табл. 3 для $\nu = 6 \cdot 10^5$, $3 \cdot 10^5$ и $1.87 \cdot 10^5$ герц.

Таблица 1 — Tabelle 1

t°C	$\operatorname{tg}\delta \cdot 10^{-3}$	
	$\nu = 3 \cdot 10^5$	$\nu = 6 \cdot 10^5$
118	25.5	13.1
120	26.4	13.6
122	27.3	14.0
124	28.2	14.5
126	29.4	15.1
128	30.5	15.6
130	31.7	16.0
132	33.2	16.6
134	35.4	17.3
135	36.8	17.7

Таблица 2 — Tabelle 2

$\nu \cdot 10^5$	$\operatorname{tg}\delta \cdot 10^{-3}$	
	$t^* = 122.1°C$	$t = 144°C$
2.15	28.0	—
2.5	24.0	—
3.0	20.5	—
3.2	19.0	48.0
3.5	17.4	40.5
4.0	15.3	36.6
4.5	13.8	33.0
5.0	12.6	29.5
6.0	10.7	23.4
7.0	9.4	20.0
8.0	8.4	17.2
10.0	6.8	13.5

Таблица 3 — Tabelle 3

$E_{\text{eff}}\frac{\text{v}}{\text{cm}}$	$\operatorname{tg}\delta = k\sigma \cdot 10^3$		
	$t = 123.6°C$, $\nu = 6 \cdot 10^5$	$t = 126.2°C$, $\nu = 3 \cdot 10^5$	$t = 126.2°C$, $\nu = 1.87 \cdot 10^5$
5.7	11.0	—	36.0
8.6	11.0	22.3	35.3
14.3	11.1	22.1	34.6
21.4	11.0	22.1	34.2
28.6	11.1	22.1	33.8

Как видим, $\nu = 6 \cdot 10^5$ дает постоянство проводимости, в то время, как $\nu = 1.87 \cdot 10^5$ показывает изменение проводимости в 6%, что значительно превышает погрешность измерений. Этот эксперимент подтверждает взгляд Германа.

Чтобы косвенным путем проверить данные предыдущей работы, нами был измерен ход $\operatorname{tg}\delta$ с постоянным полем, приложенным к жидкости. Он показан в табл. 4.

Из сравнения с табл. 4 видим, что уменьшение $\operatorname{tg}\delta$ с постоянным полем более резко (40%), чем при $\nu = 1.87 \cdot 10^5$ герц.

Таблица 4 — Tabelle 4

$E\frac{\text{v}}{\text{cm}}$	$\operatorname{tg}\delta \cdot 10^{-3}$	
	$t = 128.7°C$	$t = 145.4°C$
2.9	13.4	22.0
4.3	12.8	21.9
7.1	11.4	20.8
10.0	10.2	19.2
12.9	9.3	16.0
17.0	—	13.6
20.0	—	12.7

Таким образом нам не удалось подтвердить существование максимумов потерь, найденных Кастом, и с другой стороны представления, высказанные Германом, получили подтверждение.

Ленинградский физико-технический институт.

Поступило 1 IV 1935.

* Перед измерениями жидкость не была переведена в изотропную фазу.

ÜBER DIELEKTRISCHE VERLUSTE IN ANISOTROPEN FLÜSSIGKEITEN

Von W. FRÉEDERICKSZ, G. MICHAJLOV und D. BENESZEWICZ

(*Vorgelegt von A. Joffe, Mitglied der Akademie, d. 1. IV. 1935*)

Aus den Untersuchungen von Kast und Ornstein (1) liess sich folgern, dass die dielektrischen Verluste des p-Azoxyanisols bei der Frequenz von $3.2 \cdot 10^5$ Hertz und 122° C ein Maximum zeigen, welches bei Steigerung der Temperatur um 2° C sich auf die Frequenz $1.5 \cdot 10^6$ Hertz verschiebt; was eine sehr starke Abhängigkeit der Lage des Maximums von der Temperatur feststellt.

Die Röntgenaufnahmen von Kast (2) zeigen bei niedrigen Frequenzen eine Orientation der Moleküle längs dem elektrischen Felde. Bei $3 \cdot 10^5$ Hertz ist keinerlei Orientation bemerkbar und bei $6 \cdot 10^5$ sind die Moleküle senkrecht zum Felde orientiert.

In diesen Experimenten sehen beide genannten Forscher eine Bestätigung ihrer Hypothese der Existenz grosser Molekülkomplexe in anisotropen Flüssigkeiten.

Eine Anomalie der dielektrischen Verluste soll, Debyes Theorie zufolge, im Zusammenhang mit einer Anomalie der Dielektrizitätskonstante ε stehen. Indessen hat Errera (3) keine Anomalie der Dielektrizitätskonstante im Gebiete von 10^6 bis 400 Hertz beobachtet.

Dieser Umstand erschwerte Ornstein und Kast die Erklärung ihrer Experimente.

Herrmann (4) schlug eine andere Erklärung der Kast'schen Röntgenaufnahmen vor: die Orientation der Moleküle längs dem Felde wird durch die Bewegung der Flüssigkeit beim Stromdurchgange hervorgerufen. Bei Steigerung der Frequenz wird die orientierende Wirkung dieser Bewegung geschwächt und geht bei $3 \cdot 10^5$ Hertz, wo die Laufbahn eines Ions mit der Länge des Moleküls vergleichbar wird, völlig verloren. Die bei höheren Frequenzen senkrecht zum Felde eintretende Orientation könnte man entweder der Lage des Dipolmomentes normal zur Länge des Moleküls, oder der Anisotropie des letzteren zuschreiben.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist die Kast'schen Experimente zu wiederholen und in Zusammenhang mit der Bewegung der Flüssigkeit beim Stromdurchgang zu bringen.

Die Messung der Dielektrizitätsverluste geschah im Resonanzkreis mittels Ersetzung des Kondensators mit der zu untersuchenden Flüssigkeit durch einen anderen von derselben Kapazität (C) mit einem hinter ihm eingeschalteten Widerstande (r).

Die Amplitude des Wechselstroms im Resonanzkreise wurde durch den Ausschlag eines Galvanometers gemessen, der sich im Kreise eines Vakuumthermoelements befand. Dieser Kreis war aperiodisch und schwach mit dem Resonatorkreis gekoppelt.

Bei der obenerwähnten Kondensatorersetzung wurden nach entsprechender Wahl des Widerstandes r, die Galvanometerausschläge ausgeglichen. Dadurch wurden auch die Verlustwinkel beider Kondensatoren gleich.

Somit wurde $\operatorname{tg}\delta$ für die anisotrope Flüssigkeit dem Produkte ωcr gleich, wo alle Grössen bekannt sind.

Die Grösse $\operatorname{tg}\delta$ für den Kondensator mit der anisotropen Flüssigkeit war erheblich grösser, als $\operatorname{tg}\delta$ für den zweiten Kondensator (ohne Wider-

stand). Der relative Fehler bei solchen Messungen beträgt etwa 2% bei kurzen Wellen und 3% bei langen.

Die Anordnung für das Erwärmen und die Regulierung der Temperatur, sowie der Kondensator mit der Flüssigkeit sind von uns in Comptes Rendus de l'Académie de l'URSS (5) beschrieben.

Die Abhängigkeit des $\operatorname{tg}\delta$ für *p*-Azoxyanisol von der Temperatur ist in der Tabelle 1 (S. 471) für die Frequenzen $3 \cdot 10^5$ Hertz und $6 \cdot 10^5$ dargestellt. Es kann kein Maximum bei irgend einer Frequenz wahrgenommen werden, da die Kurven der Gleichung

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{k}{1 - \alpha t}$$

gemäss verlaufen.

Es ist zu bemerken, dass der Koeffizient α davon abhängig ist, ob wir von niedrigen zu höheren Temperaturen, oder umgekehrt messen.

$\operatorname{Tg}\delta$ ist in der Tabelle 2 (S. 471) als Funktion der Frequenz angegeben. Diese Funktion kann durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{1}{\nu}$$

ausgedrückt werden.

Bei Veränderung der Temperatur blieb die Form der Funktion dieselbe.

In unserer vorigen Arbeit (5) war die Vermutung ausgesprochen, dass eine Verminderung der Leitfähigkeit des *p*-Azoxyanisols bei wachsendem Felde mit der mechanischen Bewegung bei Stromdurchgang in Zusammenhang stände.

Existiert eine solche Bewegung auch beim Wechselstrom, so wäre ein Sinken der Leitfähigkeit auch hier zu erwarten.

In der Tabelle 4 ist die Abhängigkeit des $\operatorname{tg}\delta$ von der effektiven Feldspannung der gegebenen Frequenz dargestellt.

Es erweist sich, dass bei $\nu = 6.10^5$ die Leitfähigkeit konstant ist, und dass das charakteristische Sinken der Leitfähigkeit schon bei $\nu = 1.87 \cdot 10^5$ Hertz deutlich ausgesprochen ist.

Das bedeutet, dass die mechanische Bewegung nahe bei $\nu = 3 \cdot 10^5$ Hertz aufhört, wodurch die Annahme Herrmanns bestätigt wird.

Um auf anderem Wege die Ergebnisse unserer vorigen Arbeit nachzuprüfen, haben wir $\operatorname{tg}\delta$ bei $\nu = 6 \cdot 10^5$ Hertz mit angelegtem konstanten Felde gemessen. Tabelle 5 zeigt das Resultat. Bei konstantem Felde ist das Sinken von $\operatorname{tg}\delta$ viel energischer (bis auf 40%), als bei $\nu = 1.87 \cdot 10^5$ Hertz.

Es ist uns also nicht gelungen, die von Kast gefundenen Verlustmaxima zu beobachten. Andererseits haben Herrmanns Vermutungen eine Bestätigung erhalten.

Physikalisch-technisches Institut.
Leningrad.

Eingegangen
d. 1. IV. 1935.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITERATUR

[1] Kast and Orstein, Trans. Far. Soc., vol. XXIX, 9, 1933. [2] Kast, ZS. f. Phys., **71**, 139, 1931. [3] Errera, Phys. ZS., **29**, 426, 1928. [4] Herrmann, Krummacher u. May, ZS. f. Phys., **73**, 419, 1932. [5] Фредерикс, Михайлов и Бенешевич, ДАН, 1935, II, № 3-4. W. Fréedericksz, G. Michajlov u. D. Beneszevicz, C. R. Acad. Sci. URSS, 1935, II, № 3-4.

ФИЗИКА

Б. И. ДАВЫДОВ

УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ С УЧЕТОМ МОЛЕКУЛЯРНОЙ СКОРОСТИ

(*Представлено академиком С. И. Вавиловым 11 II 1935*)

При выводе обычного уравнения диффузии

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{1}$$

скорость, с которой частицы движутся от столкновения до столкновения, считается бесконечно большой. Коэффициент диффузии D выражается через длину свободного пробега ξ и среднюю его продолжительность τ так:

$$D = \frac{\overline{\xi^2}}{2\tau} = \frac{\overline{\xi^2}}{\tau} = c^2\tau, \tag{2}$$

где c средняя скорость частиц; уравнение (1) получается в пределе при

$$c^2 \to \infty, \quad \tau \to 0.$$

Скорость движения частиц можно учесть только учитывая одновременно и продолжительность свободного пробега. Это заставляет рассматривать задачу в фазовом пространстве, что значительно усложняет дело. Однако, в одномерном случае можно ограничиться координатным пространством, если считать, что все частицы движутся с одинаковой скоростью, т. е. что скорость (собственно, составляющая скорости по x) равна $\pm c$.

Состояние тогда полностью определяется заданием двух функций: w_1 — вероятности того, что частица, находясь в данной точке, движется со скоростью $+c$, и w_2 — вероятности скорости $-c$. Полная плотность вероятности w и поток ее s будут:

$$w = w_1 + w_2, \quad s = c(w_1 - w_2). \tag{3}$$

Считаем, что средняя продолжительность свободного пробега не зависит от w_i (линейная задача, рассматриваются частицы „растворенные" в каком-то газе и не взаимодействующие между собой) и что после каждого столкновения частица с равной вероятностью приобретает скорость $+c$ или $-c$. За время dt, w_1 уменьшится на $c\frac{\partial w_1}{\partial x}dt$. Кроме того столкнется $\frac{w_1}{\tau}dt$ частиц; половина из них получит после столкновения скорость $-c$ и это также даст убыль w_1.

Точно так же из столкнувшихся частиц, двигавшихся до столкновения со скоростью $-c$, половина, т. е. $\frac{w_2}{2\tau}dt$, получит скорость $+c$ и на такую величину w_1 увеличится. Совершенно аналогичные соображения имеем для w_2 и в результате получаем уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial t} + c\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{1}{2\tau}(w_1 - w_2) = 0; \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} - c\frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{1}{2\tau}(w_2 - w_1) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Введем унитарные матрицы, действующие на индексы 1 и 2 у w_i:

$$\alpha_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \qquad \alpha_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \alpha_3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

С помощью этих матриц уравнения (4) могут быть записаны также в виде:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_1 c \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2\tau}(1 - \alpha_2)\right\} w = 0. \tag{4'}$$

Исключая w_1 или w_2 из уравнений (4), получим для каждой из них уравнение второго порядка:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial w}{\partial t} = 0. \tag{5}$$

В пределе при $c \to \infty$, $\tau \to 0$, это дает уравнение (1), если считать $D = c^2 \tau$ конечным.

Решения уравнения (5) имеют вид:

$$w = \exp\left(ikx \pm \nu t - \frac{t}{2\tau}\right), \quad \text{где} \quad \nu = \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - c^2 k^2}. \tag{6}$$

Таким образом, при $k < \frac{1}{2c\tau}$ решения показательные, при $k > \frac{1}{2c\tau}$ — периодические. Подставляя их в уравнения (4) и комбинируя так, чтобы в начальный момент отличалась от нуля только w_1 или только w_2, получим

$$\begin{aligned} w_1' &= \exp\left(ikx - \nu t - \frac{t}{2\tau}\right) - \left(\frac{ick - \nu}{2\tau}\right)^2 \exp\left(ikx + \nu t - \frac{t}{2t}\right); \\ w_2' &= 2\tau\,(ick - \nu)\left\{\exp\left(ikx - \nu t - \frac{t}{2\tau}\right) - \exp\left(ikx + \nu t - \frac{t}{2\tau}\right)\right\}; \end{aligned} \tag{7}$$

и

$$\begin{aligned} w_1'' &= 2\tau\,(ick + \nu)\left\{\exp\left(ikx - \nu t - \frac{t}{2\tau}\right) - \exp\left(ikx + \nu t - \frac{t}{2\tau}\right)\right\}; \\ w_2'' &= -\left(\frac{ick - \nu}{2\tau}\right)^2 \exp\left(ikx - \nu t - \frac{t}{2\tau}\right) + \exp\left(ikx + \nu t - \frac{t}{2\tau}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом оба знака корня у ν имеют физический смысл. Всякая неотрицательная вещественная линейная комбинация выражений (7) и (8) дает решение задачи.

Когда $\tau \to 0$, периодические решения (6) пропадают, так как все они имеют множителем $\exp(-t/2\tau)$; из показательных решений соответствующие отрицательному ν также пропадут. Все эти решения соответствуют неравномерному распределению по скоростям $+c$ и $-c$ и они быстро исчезают. Для показательных решений с положительным ν имеем при $\tau \to 0$:

$$\exp\left(\nu t - \frac{t}{2\tau}\right) \to \exp(-c^2 k^2 t\tau) = \exp(-Dk^2 t),$$

т. е. решения уравнения (1).

На 3-мерный случай метод не обобщается. Здесь предположение о том, что все частицы движутся с одинаковой скоростью, из 6-мерного фазового пространства выделило бы 5-мерное многообразие, так что задача не может быть ограничена координарным пространством.

Научно-исследовательский институт телемеханики.
Ленинград.

Поступило
11 II 1935.

DIFFUSIONSGLEICHUNG MIT BERÜCKSICHTIGUNG DER MOLEKULARGESCHWINDIGKEIT

Von B. I. DAVYDOV

(*Vorgelegt von S. I. Wawilow, Mitglied der Akademie, d. 11. II. 1935*)

Bei Ableitung der gewöhnlichen Diffusionsgleichung:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad (1)$$

wird die Geschwindigkeit, mit der sich die Teilchen zwischen zwei Zusammenstössen bewegen, unendlich gross gesetzt. Der Diffusionskoeffizient D kann durch die freie Weglänge ξ und ihre mittlere Zeitdauer τ auf folgende Weise ausgedrückt werden.

$$D = \frac{\overline{\xi^2}}{2\tau} = \frac{\overline{\xi}^2}{\tau} = c^2 \tau, \qquad (2)$$

wo c die Durchschnittsgeschwindigkeit der Teilchen ist. Im Grenzfall, bei $c^2 \to \infty$, $\tau \to 0$, erhält man Gleichung (1).

Die Berücksichtigung der Bewegungsgeschwindigkeit der Teilchen wird nur bei gleichzeitiger Rücksichtnahme auf die durchschnittliche Zeitdauer zwischen zwei Zusammenstössen möglich. Das nötigt uns die Aufgabe im Phasenraum zu betrachten, wodurch die Sache wesentlich kompliziert wird. Im eindimensionalen Fall kann man sich jedoch auf den Koordinatenraum beschränken, wenn man voraussetzt, dass alle Teilchen sich mit ein und derselben Geschwindigkeit bewegen, d. h. dass die Geschwindigkeit (eigentlich handelt es sich um die Geschwindigkeitskomponente in der Richtung der x-Axe) gleich $\pm c$ ist.

Der Zustand ist dann vollständig durch die Angabe zweier Funktionen bestimmt, nämlich: durch w_1, die Wahrscheinlichkeit, dass ein im gegebenen Punkt befindliches Teilchen sich mit der Geschwindigkeit $+c$ bewegt, und durch w_2, die Wahrscheinlichkeit der Geschwindigkeit $-c$. Die gesamte Wahrscheinlichkeitsdichte w und der Wahrscheinlichkeitsstrom s sind:

$$w = w_1 + w_2, \quad s = c(w_1 - w_2). \qquad (3)$$

Wir wollen voraussetzen, dass die mittlere Dauer der freien Weglänge von wi nicht abhängt (lineare Aufgabe, es werden in irgend einem Gas „gelöste" Teilchen, zwischen denen keine Wechselwirkung stattfindet, betrachtet) und dass nach jedem Zusammenstoss das Teilchen mit ein und derselben Wahrscheinlichkeit die Geschwindigkeit $+c$ bzw. $-c$ erhält. Während der Zeit dt vermindert sich w_1 um die Grösse $c \frac{\partial w_1}{\partial x} dt$. Ausserdem stossen in dieser Zeit $\frac{w_1}{\tau} dt$ Teilchen, zusammen; die Hälfte dieser Teilchen erhält nach dem Stoss die Geschwindigkeit $-c$, was auch den Wert von w_1 herabsetzt.

Betrachtet man die Teilchen, die sich vor dem Zusammenstoss mit de Geschwindigkeit $-c$ bewegten, so sieht man, dass die Hälfte, d. h. $\frac{w_2}{2\tau} dt$ Teilchen, die Geschwindigkeit $+c$ erhalten, d. h. w_1 wird um diesen Betrag

grösser. Analoge Überlegungen gelten auch für w_2, somit erhalten wir die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial t} + c\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{1}{2\tau}(w_1 - w_2) = 0; \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} - c\frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{1}{2\tau}(w_2 - w_1) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Wollen wir unitäre Matrizen einführen, die sich auf die Indizes 1 und 2 bei w_i beziehen:

$$\alpha_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \qquad \alpha_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \alpha_3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Mittels dieser Matrizen können die Gleichungen (4), folgende Gestalt annehmen:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_1 c\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2\tau}(1 - \alpha_2)\right\} w = 0. \tag{4'}$$

Eliminiert man w_1 oder w_2 aus den Gleichungen (4), so erhält man für diese beiden Grössen eine Gleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial w}{\partial t} = 0. \tag{5}$$

Im Grenzfall bei $c \to \infty$, ist $\tau \to 0$, auf Grund von Gleichung (1), falls $D = c^2\tau$ als endlich gesetzt wird.

Die Lösungen der Gleichung (5) haben folgende Gestalt:

$$w = \exp\left(ikx \pm \nu t - \frac{t}{2\tau}\right), \qquad \text{wo} \qquad \nu = \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - c^2k^2}. \tag{6}$$

Bei $k < \frac{1}{2c\tau}$ sind also die Lösungen exponentiell, bei $k > \frac{1}{2c\tau}$ sind sie periodisch. Setzt man diese Lösungen in Gleichung (4) ein und kombiniert sie so, dass im Anfangsmoment nur w_1 oder nur w_2 von Null verschieden ist, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} w_1' &= \exp\left(ikx - \nu t - \frac{t}{2\tau}\right) - \left(\frac{ick - \nu}{2\tau}\right)^2 \exp\left(ikx + \nu t - \frac{t}{2\tau}\right); \\ w_2' &= 2\tau(ick - \nu)\left\{\exp\left(ikx - \nu t - \frac{t}{2\tau}\right) - \exp\left(ikx + \nu t - \frac{t}{2\tau}\right)\right\}; \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

und

$$\left.\begin{aligned} w_1'' &= 2\tau(ick + \nu)\left\{\exp\left(ikx - \nu t - \frac{t}{2\tau}\right) - \exp\left(ikx + \nu t - \frac{t}{2\tau}\right)\right\}; \\ w_2'' &= -\left(\frac{ick - \nu}{2\tau}\right)^2 \exp\left(ikx - \nu t - \frac{t}{2\tau}\right) + \exp\left(ikx + \nu t - \frac{t}{2\tau}\right). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Beide Vorzeichen der Wurzel von ν haben also einen physikalischen Sinn. Jede nicht negative reelle lineare Kombination der Ausdrücke (7) und (8) liefert eine Lösung der Aufgabe.

Ist $\tau \to 0$, so verschwinden die periodischen Lösungen (6), da sie alle den Faktor $\exp(-t/2\tau)$ enthalten; es verschwinden auch diejenigen exponentiellen Lösungen, die einem negativen ν entsprechen. Alle diese Lösungen, welche übrigens schnell verschwinden, entsprechen einer ungleichmässigen Verteilung nach $+c$ und $-c$. Für exponentielle Lösungen mit positivem ν haben wir bei $\tau \to 0$:

$$\exp\left(\nu t - \frac{t}{2\tau}\right) \to \exp(-c^2k^2t\tau) = \exp(-Dk^2t),$$

d. h. eine Lösung der Gleichung (1).

Diese Methode kann nicht auf den dreidimensionalen Fall verallgemeinert werden. In diesem Fall müsste die Voraussetzung, dass alle Teilchen sich mit gleicher Geschwindigkeit bewegen, aus dem 6-dimensionalen Phasenraum eine 5-dimensionale Mannigfaltigkeit herausheben, so dass die Aufgabe nicht im Koordinatenraum gelöst werden könnte.

Institut für Telemechanik.
Leningrad.

Eingegangen
d. 11. II 1935.

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

А. Г. САМАРЦЕВ

О КАТОДНОЙ ПАССИВНОСТИ СЕРЕБРА В РАСТВОРАХ АЗОТНОКИСЛОЙ СЕРЕБРЯНОЙ СОЛИ

(*Представлено академиком И. В. Гребенщиковым 27 III 1935*)

В ряде работ различных авторов было показано, что образование первых зародышей металла на катоде при электролизе некоторых растворов сопровождается явлениями торможения ([1, 2]). Эффект торможения наблюдается даже при выделении металла на одноименном катоде. Например, установлено, что серебряный электрод в растворах $AgNO_3$ в отношении зародышей серебра ведет себя как индифферентный электрод ([2]).

Процесс электролиза после появления зародышей разыгрывается только на их поверхности, в то время как остальная поверхность катода является недеятельной.

Кроме того, при изучении электролитического роста одиночного кристалла серебра, Кольшюттер и Торричелли ([1]) наблюдали, что явление торможения обнаруживается и на самом растущем кристалле. Это выражается в нарушении регулярного развития кристалла, если действительная плотность тока на его гранях спускается ниже некоторой определенной границы.

Указанные явления охватываются понятием катодной пассивности.*

В настоящем коротком сообщении приводятся дополнительные данные о явлениях катодной пассивности при электролитической кристаллизации серебра из растворов $AgNO_3$.

Экспериментальная часть

В качестве катода использовалось поперечное сечение серебряной или платиновой проволоки, плотно вправленной (в случае платины впаянной) в толстостенный стеклянный капилляр. Перед опытом проводящая поверхность катода подвергалась шлифовке.

Электролитическая ячейка монтировалась на столике микроскопа, снабженного винтовым окулярным микрометром. Наблюдения поверхности катода производились через слой раствора.

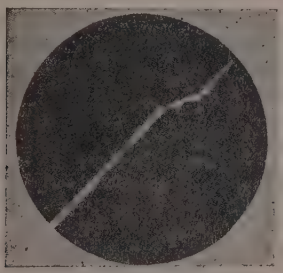
Сила тока в ячейке от момента включения и до конца опыта, там где это специально не оговорено, оставалась постоянной. Стабилизация тока достигалась путем включения ячейки в анодную цепь электронной лампы, работающей на токе насыщения.

Опыты производились с растворами $2n AgNO_3$.

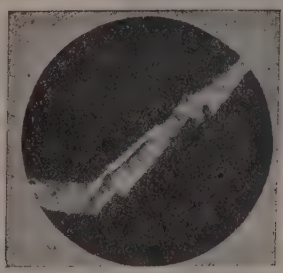
* О явлениях катодной пассивности серебра см. также заметку T. Erdey-Gruz ([3]).

После включения небольшого тока ($1 \cdot 10^{-7} — 1 \cdot 10^{-6}$ А) на поверхности катода обнаруживается растущий кристаллик серебра, обычно в виде комбинации куба с октаэдром ($^{100}/_{111}$). Так как сила тока в ячейке во время опыта остается постоянной, а величина проводящей поверхности с развитием кристалла возрастает, то действительная плотность тока на его гранях, по мере течения электролиза, снижается. Вначале развитие кристалла протекает нормально; он ограничен зеркальными гранями и имеет правильную форму. Затем появляются новые грани более высоких индексов — кристалл „округляется“.

В дальнейшем регулярный рост нарушается. На некоторых участках поверхности кристалла появляются неровности, и вскоре эти участки теряют свою активность, т. е. на них прекращается отложение металла. Пассивирование начинается от углов и ребер кристалла и далее распространяется на некоторые грани.



Фиг. 1. — Abb. 1.



Фиг. 2. — Abb. 2.

Как „округление“ кристалла, так и пассивирование части его поверхности ведет к тому, что на активных участках действительная плотность тока, в соответствии с данными Кольшюттера и Торричелли, не опускается ниже некоторой величины.

Через известный промежуток времени отложение металла происходит только на одной грани (реже на нескольких смежных одноименных гранях, например на трех пересекающихся гранях куба). Величина активной поверхности после этого не изменяется, и растущий кристалл вырождается в иглу или нить постоянного сечения. Металл выделяется только на свободном конце нити, тогда как боковая ее поверхность оказывается пассивной. При продолжительном электролизе длина нити достигает многих сантиметров.

Кристаллическая нить часто ограничена правильными гранями. Она иногда дает резкие пространственные изломы (преимущественно на местах двойниковых срастаний), но остается монокристаллической. Ни разу не наблюдалось разветвления нити. На фиг. 1 виден участок серебряной нити при 90× увеличении. В некоторых растворах нить развивается менее регулярно, как, например, это представлено на фиг. 2.

Измеряя под микроскопом линейную скорость роста кристаллической серебряной нити, можно определить действительную плотность тока на активной поверхности.

Следующие опыты показывают, что величина активной поверхности приспособляется к силе тока, текущего через ячейку. Если, по достиже-

нии установившегося регулярного роста нити, силу тока внезапно увеличить, то активная поверхность разрастается, и далее продолжает развиваться нить большего поперечного сечения. Замечательно, что линейная скорость роста при этом не изменяется. На фиг. 3 представлена нить, сечение которой нарастает ступенями. Каждая новая ступень образовывалась после увеличения тока в ячейке.

Произведенные опыты позволяют сделать вывод, что действительная плотность тока на катоде в данном растворе устанавливается автоматически, независимо от величины тока, текущего через ячейку. Уже первые опыты показали, что линейная скорость кристаллизации серебра на катоде в растворах $2n$ $AgNO_3$ различна, если растворы были приготовлены в разное время или из различных препаратов $AgNO_3$. Отмечено, например, что в старых растворах пассивирование идет быстрее (бо́льшая линейная скорость кристаллизации), чем в свеже-приготовленных. Каждый из этих растворов, однако, давал в ряде последовательных опытов воспроизводимые результаты.

Фиг. 3. — Abb. 3.

Дальнейшими опытами установлено, что в слабо подкисленных азотной кислотой или прокипяченных растворах $AgNO_3$ явления пассивирования сказываются лишь незначительно. В этих растворах регулярный рост кристаллов серебра возможен при очень малых плотностях тока.

Напротив, ничтожные прибавки к раствору поверхностно активных веществ, например олеиновой кислоты, ведут к сильному повышению плотности тока на гранях растущего кристалла. В наших опытах с различными растворами $2n$ $AgNO_3$ действительная самоустанавливающаяся плотность тока на активной поверхности катода менялась в десятки раз, достигая в некоторых растворах значительной величины (до 0.6 $А/см^2$) при очень малой силе тока в цепи (10^{-7} — 10^{-6} А).

Самоустанавливающаяся плотность тока на активных участках катода или соответствующая ей линейная скорость кристаллизации могут служить количественной характеристикой скорости пассивирования поверхности металла в данном растворе. Естественно, чем больше пассивирующее действие раствора, тем больше должна быть плотность тока на грани развивающегося кристалла, чтобы был возможен регулярный рост этой грани.

На основании произведенных опытов мы приходим к заключению, что процессы пассивирования серебряного катода связаны с образованием чужеродных покровных слоев, затягивающих поверхность катода с определенной для данного раствора скоростью. Покровные слои могут быть как оксидной так и адсорбционной природы.

В заключение приводим еще некоторые наблюдения. В прокипяченном растворе $AgNO_3$ на катоде при небольшом токе растет кристалл с хорошими гранями. После продолжительного роста ток был выключен на 10 мин. При последующем включении поверхность кристалла покрывается неровностями, которые затем исчезают, и кристалл продолжает развиваться нормально. Перерыв тока на 30 мин. приводит к тем же результатам, только появившиеся неровности более резко выражены.

После дальнейшего многочасового роста кристалл оказался сильно деформированным с грубо-шероховатой поверхностью. Увеличение тока

ведет к „залечиванию“ дефектов на гранях, и кристалл опять регулярно развивается. В этом растворе пассивирование серебряной поверхности выражено лишь в слабой степени.

В других растворах уже кратковременный перерыв тока (на $1-1\frac{1}{2}$ мин.) ведет к полному пассивированию кристалла, и при последующем включении тока на катоде развивается новый зародыш. Однако, и в этих растворах, если перерыв тока был не слишком продолжителен и пассивирование не зашло далеко, поверхность кристалла после включения тока покрывается неровностями, которые затем исчезают, и кристалл развивается нормально.

„Залечивание“ дефектов частично пассивированной поверхности, а также и вышеописанное пассивирование кристалла, выражающееся в его „округлении“, делаются понятными, если предположить, что чужеродный покровный слой, затягивающий поверхность серебра, обладает некоторой подвижностью.

Выводы

Опыты по электролитической кристаллизации серебра из растворов $AgNO_3$ показали, что выделение металла на активных участках катода возможно лишь при конечных, иногда значительных, плотностях тока.

Величина активной поверхности самопроизвольно приспособляется к току, текущему через катод, так, чтобы плотность тока не опускалась ниже некоторой границы, характерной для данной электролитической ванны.

Регулирующим фактором является скорость пассивирования поверхности серебра раствором ванны. Механизм пассивирования сводится к образованию оксидных и адсорбционных слоев.

Покровные слои на поверхности металла, по крайней мере в первой стадии своего существования, повидимому, обладают некоторой подвижностью.

Несомненно, что структура обычных электролитических осадков металла стоит в связи с явлениями катодного пассивирования.

Химический сектор
Государственного оптического института.
Ленинград.

Поступило
27 III 1935.

PHYSIKALISCHE CHEMIE

ÜBER DIE KATHODISCHE PASSIVITÄT DES SILBERS IN SILBERNITRATLÖSUNGEN

Von A. G. SAMARCEV

(*Vorgelegt von I. V. Grebenščikov, Mitglied der Akademie, d. 27. III. 1935*)

In einer Reihe von Arbeiten verschiedener Autoren wurde gezeigt, dass die Bildung der ersten Metallkeime an der Kathode bei der Elektrolyse gewisser Lösungen Hemmungserscheinungen [1, 2] im Gefolge hat. Der Hemmungseffekt lässt sich sogar bei der Metallabscheidung an einer gleichnamigen Kathode beobachten. Es ist z. B. festgestellt worden, dass Silber

sich in $AgNO_3$-Lösungen wie eine indifferente Elektrode inbezug auf Silberkeime verhält (2).

Nach Auftreten der Keime spielt sich die Elektrolyse nur an deren Oberfläche ab, während die übrige Kathodenoberfläche inaktiv bleibt.

Bei Untersuchung des elektrolytischen Wachstums von Silbereinzelkristallen haben Kohlschütter u. Torricelli (1) festgestellt, dass eine Hemmungserscheinung auch am wachsenden Kristall selbst wahrgenommen werden kann. Dieses äussert sich in einer Störung der regelrechten Kristallentwicklung, wenn die wahre Stromdichte an den Kristalloberflächen eine gewisse Grenze unterschreitet.

Die soeben erwähnten Erscheinungen lassen sich durch den Begriff der „kathodischen Passivität" kennzeichnen.*

In der vorliegenden kurzen Mitteilung werden ergänzende Angaben über die kathodische Passivität angeführt, welche bei der elektrolytischen Kristallisation des Silbers aus $AgNO_3$-Lösungen auftritt.

Experimenteller Teil

Als Kathode bedienten wir uns des Querschnittes eines Silber- oder Platindrahtes, der genau in eine dickwandige Glaskapillare eingepasst bzw. eingeschmolzen war. Vor dem Versuch wurde die Leitfläche der Kathode geschliffen.

Die Elektrolysierzelle war auf einem mit Schraubenokularmikrometer versehenen Mikroskoptisch montiert. Die Kathodenoberfläche wurde durch eine Schicht der Lösung beobachtet.

Die Stromstärke blieb in der Zelle — dort, wo dieses nicht vorbehältlich erwähnt wird — während des ganzen Zeitraumes vom Moment der Einschaltung bis zum Schluss des Versuches konstant. Die Stabilisierung des Stromes wurde durch Einschaltung der Zelle in den Anodenkreis einer mit Sättigungsstrom arbeitenden Elektronenröhre erreicht.

Die Versuche wurden mit $2n AgNO_3$-Lösungen ausgeführt.

Nach Einschaltung eines schwachen Stromes ($1 \cdot 10^{-7} — 1 \cdot 10^{-6}$ A) lässt sich an der Kathodenoberfläche ein wachsendes Silberkriställchen, gewöhnlich in Form einer Kombination von Würfel und Oktaëder ($^{100}/_{111}$), erkennen. Da die Stromstärke in der Zelle während des Versuches konstant bleibt, die leitende Fläche dagegen mit der Entwicklung des Kristalles an Grösse zunimmt, so nimmt die wahre Stromdichte an seinen Flächen mit dem Verlauf der Elektrolyse ab. Die Entwicklung des Kristalls verläuft anfangs normal: er ist von Spiegelflächen begrenzt und ist von regulärer Form. Sodann erscheinen neue Flächen mit höheren Indizes — der Kristall „rundet sich ab."

Im weiteren Verlauf wird das geregelte Wachstum gestört. Auf der Kristalloberfläche kommen Unebenheiten an einigen Stellen zum Vorschein, die bald darauf ihre Aktivität verlieren, d. h. die Metallablagerung an denselben hört auf. Die Passivierung beginnt an den Ecken und Kanten und breitet sich weiter auf einige Flächen aus.

Die „Abrundung" des Kristalls wie auch die Passivierung eines Teiles seiner Oberfläche haben als Folge, dass an den aktiven Stellen die wahre Stromdichte — im Einklange mit den Angaben von Kohlschütter u. Torricelli — in der Tat eine gewisse Grenze nicht unterschreitet.

* Über die kathodische Passivität des Silbers s. auch die Notiz von T. Erdey-Gruz (3).

Nach einiger Zeit beginnt das Metall sich nur an einer Fläche abzuscheiden (seltener an mehreren benachbarten gleichnamigen Flächen, z. B. an drei sich gegenseitig schneidenden Würfelflächen). Die Grösse der aktiven Fläche erleidet darauf keine Veränderung, und der wachsende Kristall artet in eine Nadel oder in einen Faden von konstantem Querschnitt aus. Das Metall scheidet sich nur am freien Ende des Fadens ab, während die Seitenfläche des letzteren sich als passiv erweist. Bei längerer Dauer der Elektrolyse erreicht der Faden eine Länge von mehreren Zentimetern.

Der Kristallfaden ist häufig von regulären Flächen begrenzt. Zuweilen weist er scharfe räumliche Brüche auf (vorwiegend an den Zwillingsverwachsungsebenen), bleibt aber doch monokristallin. Es wurde nie eine Verzweigung des Fadens wahrgenommen. Lichtbild 1 (S. 479) zeigt einen Teil des Fadens in 90-facher Vergrösserung. In manchen Lösungen entwickelt sich der Faden weniger regulär, wie das z. B. aus Lichtbild 2 zu ersehen ist.

Durch Messen der linearen Wachstumsgeschwindigkeit des kristallinischen Silberfadens unter dem Mikroskop kann man die wahre Stromdichte an der aktiven Oberfläche bestimmen.

Die darauffolgenden Versuche zeigen, dass die aktive Oberfläche sich in ihrer Grösse der Stärke des durch die Zelle gehenden Stromes anpasst. Wird die Stromstärke, nachdem sich ein geregeltes Wachsen des Fadens eingestellt hat, plötzlich erhöht, so nimmt die aktive Oberfläche zu, und es entwickelt sich weiter ein Faden von grösserem Querschnitt. Bemerkenswert ist, dass die lineare Wachstumsgeschwindigkeit sich hierbei nicht ändert. Lichtbild 3 zeigt einen Faden, dessen Querschnitt stufenweise anwächst. Jede neue Stufe bildete sich nach Steigerung der Stromstärke in der Zelle.

Die obigen Versuche berechtigen zum Schluss, dass die wahre Stromdichte an der Kathode sich in der gegebenen Lösung selbsttätig einstellt, unabhängig von der Grösse des durch die Zelle gehenden Stromes. Schon die ersten Versuche zeigten, dass die lineare Kristallisationsgeschwindigkeit des Silbers an der Kathode in $2n AgNO_3$-Lösungen verschieden ist, wenn die Lösungen zu verschiedener Zeit oder aus verschiedenen $AgNO_3$-Präparaten hergestellt waren. Es ist z. B. festgestellt worden, dass die Passivierung sich in alten Lösungen schneller vollzieht (grosse lineare Kristallisationsgeschwindigkeit), als in frisch hergestellten. Jede dieser Lösungen ergab jedoch in einer Reihe von aufeinanderfolgenden Versuchen reproduzierbare Resultate.

Die weiteren Versuche ergaben, dass sich in durch Salpetersäure schwach angesäuerten oder vorher ausgekochten $AgNO_3$-Lösungen die Passivierungserscheinungen nur in unbedeutendem Masse äussern. In diesen Lösungen ist ein geregeltes Wachstum der Silberkristalle bei sehr geringen Stromdichten möglich.

Unbedeutende Zusätze von oberflächlich aktiven Stoffen, z. B. Oleinsäure, zu der Lösung führen dagegen zu einer starken Zunahme der Stromdichte an den Flächen des wachsenden Kristalls. In unseren Versuchen mit verschiedenen $2n AgNO_3$-Lösungen änderte sich die wahre selbsttätig eingetretene Stromdichte an der aktiven Oberfläche der Kathode in mehrere mal zehnfältigem Verhältnis und erreichte hierbei in manchen Lösungen eine beträchtliche Grösse (bis 0.6 A/cm²) bei sehr geringer Stromstärke im Kreise (10^{-7} — 10^{-6} A).

Die selbsttätig sich einstellende Stromdichte an den aktiven Stellen der Kathode oder die ihr entsprechende lineare Kristallisationsgeschwindigkeit kann als quantitative Charakteristik der Passivierungsgeschwin-

digkeit der Metalloberfläche in der betreffenden Lösung dienen. Es ist einleuchtend, dass je grösser die passivierende Wirkung der Lösung ist, umso grösser die Stromdichte an der Fläche des sich entwickelnden Kristalls sein muss, um ein geregeltes Wachstum dieser Fläche zu ermöglichen.

Auf Grund der ausgeführten Versuche gelangen wir zum Schluss, dass die Passivierungsprozesse an der Silberkathode mit einer Bildung von Fremdkörperoberschichten im Zusammenhang stehen, die die Kathodenoberfläche mit einer für die betreffende Lösung bestimmten Geschwindigkeit überdeckt. Die Deckschichten können sowohl oxydischer als auch adsorptionaler Natur sein.

Zum Schluss seien noch einige Beobachtungen angeführt. In einer gekochten $AgNO_3$-Lösung kommt an der Kathode bei geringer Stromstärke ein Kristall mit gut ausgebildeten Flächen zum Wachsen. Nach längerem Wachstum wurde der Strom auf 10 Min. ausgeschaltet. Bei darauffolgender Einschaltung bedeckt sich die Oberfläche des Kristalls mit Unebenheiten, die danach verschwinden, worauf der Kristall sich normal weiterentwickelt. Eine Unterbrechung des Stromes während 30 Min. führt zu den gleichen Resultaten, nur sind die Unebenheiten in diesem Falle schärfer ausgeprägt.

Nach weiterem mehrstündigem Wachstum erwies sich der Kristall als stark deformiert mit einer grob-rauhen Oberfläche. Eine Steigerung der Stromstärke führt zur Beseitigung der Mängel an den Flächen und der Kristall entwickelt sich wieder regelrecht. In dieser Lösung ist die Passivierung der Silberfläche nur in schwachem Masse ausgedrückt.

In anderen Lösungen führt schon eine kurze Unterbrechung des Stromes $\left(\text{auf } 1-1\frac{1}{2} \text{ Min.}\right)$ zur völligen Passivierung des Kristalls und nach darauffolgender Einschaltung des Stromes entwickelt sich an der Kathode ein neuer Keim. Aber auch in diesen Lösungen bedeckt sich, falls der Strom auf keine allzu lange Zeit ausgeschaltet und die Passivierung nicht zu weit gegangen war, die Kristalloberfläche nach Einschaltung des Stromes mit Unebenheiten, die bald verschwinden; der Kristall entwickelt sich hierauf normal. Die Beseitigung der Mängel an teilweise passivierten Oberflächen, sowie auch die oben beschriebene Passivierung des Kristalls, die sich in seiner „Abrundung" kundgibt, lassen sich ohne weiteres begreifen, wenn man annimmt, dass der Fremdkörperoberschicht, die die Silberfläche bedeckt, eine gewisse Beweglichkeit eigen ist.

Zusammenfassung

Die Versuche betreffs elektrolytischer Kristallisation des Silbers aus $AgNO_3$-Lösungen zeigten, dass eine Metallabscheidung an aktiven Stellen der Kathode nur bei endlichen, zuweilen bedeutenden Stromdichten möglich ist.

Die aktive Oberfläche passt sich in ihrer Grösse selbsttätig dem durch die Kathode gehenden Strom derart an, dass die Stromdichte eine gewisse Grenze, die für das betreffende elektrolytische Bad charakteristisch ist, nicht unterschreitet.

Als regulierender Faktor dient die Geschwindigkeit der durch die Lösung des Bades herbeigeführten Passivierung der Silberfläche. Der Mechanismus der Passivierung lässt sich auf die Bildung oxydischer bzw. adsorptionsartiger Schichten zurückführen.

Die Überzugschichten an der Metalloberfläche verfügen anscheinend, wenigstens im ersten Stadium ihres Bestehens, über eine gewisse Beweglichkeit.

Die Struktur der üblichen elektrolytischen Metallniederschläge steht zweifelsohne mit den Erscheinungen der kathodischen Passivierung im Zusammenhang.

Chemische Abteilung
des Optischen Instituts.
Leningrad.

Eingegangen
d. 27. III. 1935.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITERATUR

[1] Le Blanc, Abh. Deutsch. Bunsen-Ges., **3**, 76—78. — T. Erdey-Gruz u. M. Volmer, ZS. phys. Ch., (A) **157**, 182 (1931). — T. Erdey-Gruz u. Wick, ZS. phys. Ch., (A) **162**, 63 (1932). — V. Kohlschütter u. Torricelli, ZS. Elektrochem., **38**, № 4, 213 (1932). — К. М. Горбунова и А. Г. Ваграмян, ДАН, IV, 443 (1934). K. M. Gorbunova u. A. G. Vagramjan, C. R. Acad. Sci. URSS, IV, 448 (1934). [2] А. Г. Самарцев и К. С. Евстропьев, ИМЕН, 1934, стр. 603; ЖФХ, 5, в. 7, 854 (1934). A. G. Samarcev u. K. S. Jevstropjev, Bull. Acad. Sci. URSS, 1934, S. 603; Journ. phys. Chem. (russ.), 5, H. 7, 854 (1934). [3] T. Erdey-Gruz, Naturwissenschaften, H. 45 (1933); ZS. phys. Chem., (A) **172**, 157—187 (1935).

ХИМИЯ

А. А. ГРИНБЕРГ И Л. М. ВОЛЬШТЕЙН

О МЕХАНИЗМЕ ДЕЙСТВИЯ ГЛИКОКОЛЛЯ НА ХЛОРОПЛАТИНИТ (ТЕТРА-ХЛОРО-ПЛАТОАТ) КАЛИЯ

(*Представлено академиком Н. С. Курнаковым 28 III 1935*)

В одной из ранее напечатанных работ одним из нас совместно с Б. В. Птицыным ([1]) было показано, что при действии гликоколля на K_2PtCl_4 образуется смесь цис- и транс-изомеров состава

$$[Pt(NH_2CH_2COO)_2],$$

причем преобладающим продуктом является транс-изомер; отношение количеств транс- и цис-изомера выражалось как 3:1.

Самый факт образования при этой реакции транс-изомера представлял очень значительный интерес и требовал специального объяснения, так как при действии аминов на платиниты, как правило, возникают только цис-изомеры (закономерность Пейроне).

Детальный сравнительный анализ условий воздействия на платиниты (платоаты) аммиака и аминов, с одной стороны, с другой же стороны — гликоколля приводит к заключению, что основное существенное различие этих процессов состоит в том, что действие NH_3 и аминов протекает в щелочной среде, между тем как при действии на платинит (платоат) гликоколля реакция вначале является практически нейтральной, а затем постепенно становится кислой, согласно уравнению:

$$K_2[PtCl_4] + 2\overset{+}{N}H_3 - CH_2 - C\overline{O}O = [Pt(NH_2CH_2COO)_2] + 2KCl + 2HCl.$$

К тому же в вышеупомянутой работе действие гликоколля на

$$K_2PtCl_4$$

велось не на холоду, а при нагревании, так как на холоду реакция идет крайне медленно.*

* По имеющимся данным протекание процесса на холоду принципиально не отличается от картины явлений, имеющих место при нагревании.

Было сделано предположение, что ведение реакции воздействия гликоколля на платинит в щелочной среде должно создать условия, аналогичные имеющим место при реакции платинита с NH_3 и аминами и, благодаря этому, привести к преимущественному образованию цис-изомера. Согласно современным воззрениям, аминокислоты жирного ряда находятся в растворе, главным образом, в виде амфолитных ионов

$$\overset{+}{N}H_3 — CH_2 — C\overset{-}{O}O.$$

Прибавление эквивалентного количества щелочи должно освободить аминогруппу и приблизить таким образом гликоколль к органическим аминам. Опыт вполне подтвердил это предположение. Действительно, при действии на платинит гликоколля в присутствии щелочи, количество которой эквивалентно карбоксильному водороду, реакция идет уже на холоду (как и для NH_3 и аминов), причем основным продуктом является цис-диглицин, к которому обычно примешано лишь небольшое количество транс-изомера. Отношение количеств цис- и транс-изомера в данном случае равно в среднем 5:1. Результаты этих опытов показывают, что при действии гликоколля в щелочной среде закономерность Пейроне остается в силе.

Возник вопрос о механизме образования столь значительных количеств транс-изомера в условиях действия гликоколля на K_2PtCl_4 в отсутствии щелочи и при нагревании, т. е. в условиях, описанных в вышеупомянутой работе. Образование в этом случае транс-изомера стало бы понятным, если бы было установлено, что при действии гликоколля на K_2PtCl_4 наряду с цис-диглицином образуется платотетраглицин

$$[Pt(GlH)_4]Cl_2,*$$

при нагревании подвергающийся расщеплению в соответствии с закономерностью Иергенсена. Ход реакций в этом случае изобразился бы следующей схемой:

1) $$K_2PtCl_4 + 4NH_2CH_2COOH = [Pt(NH_2CH_2COOH)_4]Cl_2 + 2KCl;$$

2) $$[Pt(NH_2CH_2COOH)_4]Cl_2 = \begin{bmatrix} HGl & Cl \\ & Pt \\ Cl & GlH \end{bmatrix} + 2GlH;$$

3) $$\begin{bmatrix} HGl & Cl \\ & Pt \\ Cl & GlH \end{bmatrix} + 2H_2O = \begin{bmatrix} HGl & OH \\ & Pt \\ HO & GlH \end{bmatrix} + 2HCl;$$

4) $$\begin{bmatrix} HGl & OH \\ & Pt \\ HO & GlH \end{bmatrix} = 2H_2O + \begin{bmatrix} CN_2NH_2 & OOCCH_2 \\ | & Pt & | \\ COO & & NH_2 \end{bmatrix}$$

Произведенные нами опыты полностью подтвердили этот предположенный механизм. Нам действительно удалось синтезировать и выделить в чистом виде плато-тетраглицин

$$[Pt(GlH)_4]Cl_2$$

и ряд его производных, которые будут подробно описаны в одной из последующих статей.

* $GlH = NH_2CH_2COOH$, $Gl = NH_2CH_2COO$.

При нагревании в водном растворе

$$[Pt(GlH)_4Cl_2]$$

действительно переходит в дихлорид (см. вышеприведенное уравнение), а последний при кипячении с водой практически нацело переходит в пластинки транс-диглицина. Таким образом, механизм действия гликоколля на K_2PtCl_4 можно считать вполне выясненным.

Экспериментальная часть

При действии на K_2PtCl_4 теоретического количества нейтрализованного гликоколля (0.5 г K_2PtCl_4 в 4 см³ воды + 0.2 г GlH в 2.6 см³ NaOH титра 0.042) при стоянии на холоду постепенно образуются игольчатые кристаллы плато-цис-диглицина, к которым примешаны в очень небольшом количестве (см. выше) пластинки трансизомера. Иглы могут быть легко очищены путем перекристаллизации. Цис-конфигурация была проверена с помощью тиомочевинной реакции. Определение платины в перекристаллизованном и высушенном препарате дало цифру 56.7% Pt; теория для $Pt2Gl$ — 56.87% Pt. Выход диглицина в этих условиях составляет 25—30% теории. В почти бесцветном фильтрате от диглицина, повидимому, остается нижеописанный тетра-глицино-платоат натрия Na_2PtGl_4.

Это последнее соединение получается если действовать на K_2PtCl_4 не теоретическим количеством нейтрализованного гликоколля (как в предыдущем случае), а избытком (0.5 г K_2PtCl_4 в 4 см³ воды + 0.5 г GlH в 7 см³ NaOH). В этих условиях красная окраска раствора быстро исчезает. Раствор постепенно почти обесцвечивается (слабо желтоватый оттенок). Никакого выделения кристаллов не происходит, даже после двухнедельного стояния. Образование в растворе иона $[PtGl_4]''$ доказывается выпадением при добавлении $BaCl_2$ прекрасно кристаллизующейся, очень трудно растворимой соли $BaPtGl_4$. Найдено при анализе 21.52 и 21.58% Ba и 30.62% Pt; теория для $BaPtGl_4$ — 21.85% Ba и 31.05% Pt. При добавлении к раствору тетраглицино-платоата теоретического количества (2HCl на Na_2PtGl_4) соляной кислоты раствор мутится, и из него выпадают белые кристаллы соединения

$$[PtGl_2(GlH)_2] \quad \text{или} \quad H_2PtGl_4.$$

Состав этого чрезвычайного интересного соединения был установлен анализами на Pt и титрованием NaOH в присутствии фенолфталеина. Теория для H_2PtGl_4 — 39.57% Pt и 0.41% H^+.

Найдено Pt : 39.70 и 39.79%
H^+: 0.39 и 0.40%

Титрование нужно вести на холоду, иначе переход окраски фенолфталеина происходит слишком рано из-за гидролиза образующегося Na_2PtGl_4.

H_2PtGl_4 является типичным амфолитом. Оно способно с крайней легкостью реагировать как с основаниями, так и с кислотами. Так, напр., при действии HCl H_2PtGl_4 переходит в вышеупомянутый плато-глицино-хлорид $[Pt(GlH_4)]Cl_2$. Реакция идет так: уже от прибавления первых капель HCl H_2PtGl_4 переходит в раствор, а затем добавлением к охлажденному раствору концентрированной HCl можно вызвать выпадение кристаллов тетра-глицино-хлорида. Уравнение реакции:

$$[PtGl_2(GlH)_2] + 2HCl = [Pt(GlH)_4]Cl_2.$$

Соединение $[Pt(GlH)_4]Cl_2$ одновременно представляет собой соль и четырехосновную кислоту, в которой все четыре водорода титруются NaOH. $[Pt(GlH)_4]Cl_2$ кристаллизуется с двумя молекулами воды, которые теряются при высушивании при 70—80°. Анализы водного вещества:

Вычислено для $[Pt(NH_2CH_2COOH)_4]Cl_2$, $2H_2O$:

32.41% Pt, 11.77% Cl, 5.98% H_2O, 0.67% H^+

Найдено: 32.13 и 32.39% Pt, 11.58% Cl, 5.95% H_2O, 0.64% H^+

Анализ обезвоженного вещества:

Вычислено для $[Pt(NH_2CH_2COOH)_4]Cl_2$: 34.47% Pt

Найдено: 34.50% Pt

$[Pt(GlH)_4]Cl_2$ очень трудно растворимо в воде. При нагревании оно переходит в раствор, однако раствор при этом желтеет, что явно указывает на внедрение хлора во внутреннюю сферу. При медлительном нагревании с последующим охлаждением образуется уже описанный ранее дихлорид состава $[Pt(GlH)_2Cl_2]$ trans. При нагревании разбавленного водного раствора этого дихлорида на водяной бане происходит образование пластинок транс-плато-диглицина.

С помощью формалиновой реакции, уже применявшейся ранее одним из нас, было с несомненностью показано, что в $[Pt(GlH)_4]Cl_2$ все 4 молекулы GlH связаны с платиной при посредстве аминогрупп (2).

Координационные формулы

$$[Pt(GlH)_4]Cl_2, \quad [PtGl_2(GlH)_2] \quad \text{и} \quad BaPtGl_4$$

имеют следующий вид:

1) $$\left[\begin{matrix} HOOCCH_2NH_2 & NH_2CH_2COOH \\ & Pt \\ HOOCCH_2NH_2 & NH_2CH_2COOH \end{matrix}\right] Cl_2;$$

2) $$\left[\begin{matrix} HOOCCH_2NH_2 & NH_2CH_2COO \\ & Pt \\ OOCCH_2NH_2 & NH_2CH_2COOH \end{matrix}\right] \text{ или } \left[\begin{matrix} OOCCH_2NH_2 & NH_2CH_2COOH \\ & Pt \\ OOCCH_2NH_2 & NH_2CH_2COOH \end{matrix}\right]$$

(выбор между этими двумя последними формулами сделать трудно, скорее всего здесь таутомерная смесь обеих модификаций) и

3) $$\left[\begin{matrix} OOCCH_2NH_2 & NH_2CH_2COO \\ & Pt \\ OOCCH_2NH_2 & NH_2CH_2COO \end{matrix}\right] Ba.$$

Кроме указанных соединений нами получен и изучен ряд их производных и аналогов, которые будут описаны в подробной статье, так же как и физико-химическая характеристика описанных амфолитов.

Химическая лаборатория
I Ленинградского медицинского института.

Поступило
28 III 1935.

CHEMIE

ÜBER DEN MECHANISMUS DER EINWIRKUNG VON GLYKOKOLL AUF KALIUMPLATINCHLORÜR (KALIUMTETRACHLOROPLATOAT)

Von A. A. GRÜNBERG und L. M. WOLSTEIN

(*Vorgelegt von N. S. Kurnakov, Mitglied der Akademie, d. 28. III. 1935*).

In einer früher veröffentlichten Arbeit, die einer von uns in Gemeinschaft mit B. Pticyn (1) unternommen hatte, wurde gezeigt, dass sich bei Einwirkung von Glykokoll auf K_2PtCl_4 ein Gemisch von cis- und trans-Isomerer bildet, welches der Zusammensetzung

$$[Pt(NH_2CH_2COO)_2]$$

entspricht. Als vorherrschendes Produkt ist in diesem Gemisch das trans-Isomers enthalten, und zwar verhielt sich dessen Menge zu derjenigen des cis-Isomers wie 3 : 1.

Schon allein die Tatsache, dass sich bei dieser Reaktion das trans-Isomer gebildet hatte, war von Interesse und bedurfte einer speziellen Erklärung, da bei Einwirkung von Aminen auf Platinite in der Regel nur cis-Isomere entstehen (Peyrone'sche Gesetzmässigkeit).

Unterwirft man die Bedingungen, unter denen Ammoniak bzw. Amine einerseits und Glykokoll andrerseits auf Platinite (Platoate) einwirken, einer eingehenden vergleichenden Analyse, so gelangt man zum Schluss, dass der Hauptunterschied dieser beiden Prozesse im Wesentlichen darin besteht, dass die Wirkung von NH_3 und Aminen in einem alkalischen Medium verläuft, während wir es bei der Einwirkung von Glykokoll auf Platinit (Platoat) mit einer Reaktion zu tun haben, die anfangs praktisch neutral ist, darauf aber — laut nachstehender Gleichung — einen sauren Charakter annimmt.

$$K_2[PtCl_4] + 2\overset{+}{N}H_3 - CH_2 - C\bar{O}O = [Pt(NH_2CH_2COO)_2] + 2KCl + 2HCl.$$

Zudem liess man in der obenerwähnten Arbeit das Glykokoll auf K_2PtCl_4 nicht in der Kälte, sondern in der Hitze einwirken, da die Reaktion in der Kälte äusserst langsam vor sich geht.*

Es wurde die Vermutung aufgeworfen, dass die Reaktion zwischen Glykokoll und Platinit, in alkalischem Medium durchgeführt, Bedingungen analog denen schaffen müsse, die bei der Reaktion zwischen Platinit und NH_3 bzw. Aminen bestehen, und dadurch auch zur vorwiegenden Bildung des cis-Isomers führen müsse. Nach den neuzeitlichen Anschauungen sind Aminosäuren der aliphatischen Reihe hauptsächlich in Form von amphoyten Ionen

$$\overset{+}{H}N_3 - CH_2 - C\bar{O}O$$

In Lösung enthalten. Durch Hinzufügen einer äquivalenten Alkalimenge muss die Aminogruppe in Freiheit gesetzt werden und das Glykokoll auf diese Weise den organischen Aminen nahekommen.

Diese Vermutung wurde nun durch den Versuch in vollem Masse bestätigt. Bei Einwirkung von Glykokoll auf Platinit in Gegenwart von Alkali, dessen Menge dem Karboxylwasserstoff äquivalent ist, vollzieht sich die Reaktion in der Tat bereits in der Kälte (wie dies auch bei NH_3 und den Aminen der Fall ist), wobei man als Hauptprodukt das cis-Diglyzin erhält, dem gewöhnlich nur geringe Mengen des trans-Isomers beigefügt sind. Das Verhältnis zwischen den Mengen des cis- und trans-Isomers beträgt im Durchschnitt 5:1. Die Ergebnisse dieser Versuche zeigen, dass bei Einwirkung von Glykokoll in alkalischem Medium die Peyrone'sche Gesetzmässigkeit in Kraft bleibt.

Es entstand nun die Frage nach dem Mechanismus der Bildung von solch beträchtlichen Mengen des trans-Isomers bei Einwirkung von Glykokoll auf K_2PtCl_4 in Abwesenheit von Alkali und in der Hitze, d. h. unter den in der obenerwähnten Arbeit beschriebenen Bedingungen. Die Bildung des trans-Isomers wäre in diesem Falle begreiflich, wenn festgestellt werden könnte, dass bei Einwirkung von Glykokoll auf K_2PtCl_4 neben cis-Diglyzin auch Platotetraglyzin $[Pt(GlH)_4]Cl_2$** entsteht, welches sich beim

* Laut vorhandenen Angaben unterscheidet sich der Verlauf des Prozesses in der Kälte im Prinzip nicht von den Vorgängen, die in der Hitze stattfinden.

** $GlH = NH_2CH_2COOH$; $Gl = NH_2CH_2COO$.

Erwärmen, entsprechend der Jörgenschen Gesetzmässigkeit, spaltet. Der Verlauf der Reaktion liesse sich dann durch folgendes Schema darstellen:

1) $K_2PtCl_4 + 4NH_2CH_2COOH = [Pt(NH_2CH_2COOH)_4]Cl_2 + 2KCl;$

2) $[Pt(NH_2CH_2COOH)_4]Cl_2 = \begin{bmatrix} HGl & Cl \\ & Pt \\ Cl & GlH \end{bmatrix} + 2GlH;$

3) $\begin{bmatrix} HGl & Cl \\ & Pt \\ Cl & GlH \end{bmatrix} + 2H_2O = \begin{bmatrix} HCl & OH \\ & Pt \\ HO & GlH \end{bmatrix} + 2HCl;$

4) $\begin{bmatrix} HGl & OH \\ & Pt \\ HO & GlH \end{bmatrix} = 2H_2O + \begin{bmatrix} CH_2NH_2 & OOCCH_2 \\ | & Pt & | \\ COO & & NH_2 \end{bmatrix}.$

Durch die von uns ausgeführten Versuche wurde dieser Mechanismus, den wir vorausgesetzt hatten, voll und ganz bestätigt. Es gelang uns tatsächlich das Platotetraglyzin $[Pt(GlH)_4]Cl_2$, sowie auch eine Reihe seiner Derivate, die in einer der nächsten Abhandlungen zur Erörterung gelangen werden, auf synthetischem Wege darzustellen und in reiner Form zu isolieren.

Beim Erwärmen in wässriger Lösung geht $[Pt(GlH)_4Cl_2]$ tatsächlich in das Dichlorid über (s. die oben angeführte Gleichung); letzteres wandelt sich jedoch, mit Wasser gekocht, völlig in trans-Diglyzin um. Somit kann der Mechanismus der Einwirkung von Glykokoll auf K_2PtCl_4 als völlig aufgeklärt betrachtet werden.

Experimenteller Teil

Lässt man auf K_2PtCl_4 die theoretische Menge von neutralisiertem Glykokoll (0.5 g K_2PtCl_4 in 4 cm^3 Wasser + 0.2 g GlH in 2.6 cm^3 NaOH vom Titer 0.042) einwirken, so bildet sich beim Stehen in der Kälte allmählich cis-Plato-Diglyzin in Form von nadelförmigen Kristallen, denen Lamellen des trans-Isomers in äusserst geringer Menge (s. oben) beigemengt sind. Die nadelförmigen Kristalle können durch Umkristallisieren leicht gereinigt werden. Die cis-Konfiguration liess sich mittels der Thioharnstoffreaktion nachprüfen. Die Platinbestimmung in dem umkristallisierten und getrockneten Präparat ergab 56.7% Pt (theoretisch beträgt der Platingehalt im Pt2Gl 56.87% Pt). Die Ausbeute an Diglyzin beträgt unter diesen Bedingungen 25—30% des theoretischen Betrages. In dem fast farblosen Filtrat von Diglyzin bleibt anscheinend das nachstehend beschriebene Natriumtetraglycinoplatoat Na_2PtGl_4 zurück.

Diese letztere Verbindung wird erhalten, wenn man auf K_2PtCl_4 nicht die theoretische Menge neutralisierten Glykokolls (wie im vorhergehenden Falle), sondern eine überschüssige Menge desselben einwirken lässt (0.5 g K_2PtCl_4 in 4 cm^3 Wasser + 0.5 g GlH in 7 cm^3 NaOH). Unter diesen Bedingungen verschwindet die rote Färbung der Lösung schnell. Allmählich verliert die Lösung fast gänzlich ihre Farbe (schwach gelbliche Abtönung). Selbst nach zweiwöchentlichem Stehen findet keinerlei Kristallausscheidung statt. Die Bildung von $(PtGl_4)''$ Ionen in der Lösung lässt sich dadurch nachweisen, dass beim Hinzufügen von $BaCl_2$ das schwerlösliche Salz $BaPtGl_4$ in vorzüglich geformten Kristallen ausfällt. Bei der Analyse wurden 21.52 und 21.58% Ba, sowie auch 30.62% Pt ermittelt (theoretisch enthält $BaPtGl_4$ 21.85% Ba und 31.05% Pt). Wird zu der Tetraglyzinoplatoat-Lösung die theoretische Menge von Salzsäure hinzugefügt (2HCl auf Na_2PtGl_4), so wird die Lösung trübe, und es scheiden sich aus derselben Kristalle der Verbindung $[PtGl_2(GlH)_2]$ oder H_2PtGl_4 aus. Die Zusammensetzung dieser überaus interessanten Verbindung wurde durch Pt-Bestimmungen, sowie auch durch Titration mit NaOH in Gegenwart von Phenolphthalein festgestellt. Theoretisch sind im H_2PtGl_4 39.57% Pt und 0.41% H enthalten. Tatsächlich wurden folgende Werte ermittelt:

Pt : 39.70 und 39.79%
H^+: 0.39 und 0.40%

Die Titration muss in der Kälte vorgenommen werden; andernfalls findet der Farbenumschlag des Phenolphthaleins, infolge der Hydrolyse des entstandenen Na_2PtGl_4, zu früh statt.

H_2PtGl_4 ist ein typischer Ampholyt. Es tritt äusserst leicht sowohl mit Basen als auch mit Säuren in Reaktion. So geht z. B. bei Einwirkung von HCl das H_2PtGl_4 in das obenerwähnte Platotetraglyzinchlorid $[Pt(GlH)_4]Cl_2$ über. Die Reaktion verläuft folgendermassen: bereits nach Hinzufügen der ersten Tropfen HCl geht H_2PtGl_4 in Lösung, worauf man dann durch Hinzufügen von konz. HCl zu der abgekühlten Lösung das Ausfällen von Tetraglyzinchlorid-Kristallen hervorrufen kann. Die diesbezügliche Reaktionsgleichung lässt sich wie folgt darstellen:

$$[PtGl_2(GlH)_2] + 2HCl = [Pt(GlH)_4]Cl_2.$$

Die Verbindung $[Pt(GlH)_4]Cl_2$ ist gleichzeitig ein Salz und eine vierbasische Säure, in welcher sämmtliche vier Wasserstoffe sich mit NaOH titrieren lassen. Die Verbindung $[Pt(GlH)_4]Cl_2$ kristallisiert mit 2 Molekülen Wasser, die beim Trocknen bei 70—80° verloren gehen. Die Analyse der wässrigen Substanz ergab folgendes:

Berechnet für $[Pt(NH_2CH_2COOH)]Cl,\ 2H_2O$:

$Pt - 32.41\%$; $Cl - 11.77\%$; $H_2O - 5.98\%$, $H^+ - 0.67\%$

Gefunden:

$Pt - 32.13$ und 32.39%; $Cl - 11.58\%$; $H_2O - 5.95\%$; $H^+ - 0.64\%$

Die Analyse der entwässerten Substanz fiel folgendermassen aus:

Berechnet für: $[Pt(NH_2CH_2COOH)_4]Cl_2$: 34.47% Pt; gefunden: 34.50% Pt.

$[Pt(GlH)_4]Cl_2$ ist eine in Wasser schwerlösliche Verbindung. Beim Erwärmen geht es in Lösung; jedoch nimmt hierbei die Lösung eine gelbliche Färbung an, was offensichtlich auf die Einlagerung des Chlors in die innere Sphäre hindeutet. Bei gelindem Erwärmen nebst darauffolgendem Abkühlen bildet sich das bereits erwähnte Dichlorid der Zusammensetzung $[Pt(GlH)_2Cl_2]$-trans. Wird die verdünnte Lösung dieses Dichlorids auf dem Wasserbade erwärmt, so bilden sich Lamellen von trans-Platodiglyzin.

Mit Hilfe der Formalinreaktion, die einer von uns bereits früher benutzt hatte, wurde gezeigt, dass in der Verbindung $[Pt(GlH)_4]Cl_2$ alle vier GlH-Moleküle an das Platin durch Vermittelung der Aminogruppen gebunden sind (2) der Verbindungen

Die Koordinationsformeln

$$[Pt(GlH)_4]Cl_2,\quad [PtGl_2(GlH)_2] \text{ und } BaPtGl_4$$

sind wie folgt:

1) $$\begin{bmatrix} HOOCCH_2NH_2 & NH_2CH_2COOH \\ & Pt \\ HOOCCH_2NH_2 & NH_2CH_2COOH \end{bmatrix} Cl_2;$$

2) $$\begin{bmatrix} HOOCCH_2NH_2 & NH_2CH_2COO \\ & Pt \\ OOCCH_2NH_2 & NH_2CH_2COOH \end{bmatrix} \text{ oder } \begin{bmatrix} OOCCH_2NH_2 & NH_2CH_2COOH \\ & Pt \\ OOCCH_2NH_2 & NH_2CH_2COOH \end{bmatrix}$$

(Es ist schwer die Wahl zwischen diesen beiden letzteren Formeln zu treffen; am ehesten liegt hier ein tautomeres Gemisch der beiden Modifikationen vor) und

3) $$\begin{bmatrix} OOCCH_2NH_2 & NH_2CH_2COO \\ & Pt \\ OOCCH_2NH_2 & NH_2CH_2COO \end{bmatrix} Ba$$

Ausser den erwähnten Verbindungen haben wir eine Reihe ihrer Derivate und Analoga isoliert und untersucht; dieselben werden in einer speziellen Abhandlung beschrieben. Danebst wird auch die physikalisch-chemische Charakteristik der beschriebenen Ampholyten näher erörtert.

Chemisches Laboratorium
des I medizinischen Instituts.
Leningrad.

Eigegangen
d. 28. III. 1935.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITERATUR

[1] Изв. Инст. изуч. плат. и др. благор. мет., 9, 1932. [2] A. Grünberg, Helv. chim. Acta, XIV, fasc. 8, 456 (1931).

ГЕОЛОГИЯ

И. Н. ЕФИМОВ

ИЗМЕНЕНИЕ ФАЦИАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ПО ПРОСТИРАНИЮ КРОВЛИ ПЛАСТОВ КАМЕННЫХ УГЛЕЙ ДОНЕЦКОГО БАССЕЙНА

(*Представлено академиком В. А. Обручевым 9 II 1935*)

В прошлом нашем сообщении (1) мы показали распределение органических остатков в кровле пластов каменных углей Донецкого бассейна в вертикальном направлении, причем были установлены, включая и пласт каменного угля, нижеследующие фации: 1) континентальная или угольная, 2) надугольная (с растительными остатками), 3) антракозид, 3) глинисто-морская, 5) сероводородного заражения. В настоящем сообщении мы попытаемся показать смену фациальных условий и в горизонтальном направлении, т. е. по простиранию пластов. Для этого нам кажется особенно важным показать переходные зоны между фациями, так как отдельные фации нами были уже охарактеризованы.

Смена фаций по простиранию пласта происходит так же как и в вертикальном направлении, но благодаря обширности простирания их (до 30 и более км) изучение фаций значительно облегчается. Если следовать по пласту вкрест простирания фаций, от континентальных к морским, мы будем наблюдать смену фаций: надугольной — глинисто-морской, глинисто-морской — сероводородного заражения, сероводородного заражения — известняковой, причем мощность нижней фации, за счет увеличения верхней, будет постепенно уменьшаться до полного исчезновения.

Наиболее полно представлены переходы от одной фации к другой в кровле пластов h_{10} и m_2, на которых мы, главным образом, и остановимся. Для одного и другого пласта мы будем следовать с запада на восток.

Изучение кровли пласта h_{10} нами начато с шахты № 19. В этой шахте над пластом каменного угля залегает углистый сланец, сперва с неопределенными растительными остатками в виде отдельных листочков, затем с *Carbonicola* и *Naiadites*, причем среди последних также встречаются отдельные листочки растений, но настолько плохой сохранности, что определить их не представляется возможным. В кровле других пластов (h'_6, h_8), нами также изучались растительные остатки, причем в нижних частях слоя растительные остатки лучшей сохранности, чаще в виде веточек, выше исчезающие, сменяясь отдельными листочками значительно худшей сохранности. Слой с растительными остатками плохой сохранности, с ясно выраженными следами транспорта мы называем переходным между фацией надугольной и фацией антракозид. В шахте № 17, где над пластом залегает слой песчано-глинистого сланца с корнями растений, выше обнаружены *Licopodites carbonaceus* Feistm. и *Neuropteris gigantea* Sternb. хорошей сохранности. В шахтах №№ 30 и 31 органические остатки и структура кровли соответствуют кровле пласта шахты № 19, что свидетельствует о большем обводнении этих крайних участков и существовании наносного континента на территории шахты № 17, т. е. переход фации надугольной, представленной глинистыми породами, в песчано-глинистую.

В шахте № 7 Наклонной образование пласта происходило и в промежуток времени образования углистых сланцев с антракозидами, в силу чего углистые сланцы с антракозидами сливаются с пластом каменного угля, а в сланцах кровли пласта впервые встречаются мелкие *Carbonicola angulata* Ryckholt (*C. similis* Pruvost — молодые экземпляры) и *Naiadites quadrata* Sow. Эти формы как правило представлены одной створкой, а если и встречаются с двумя створками, то всегда раскрытыми и, кроме того, размер их уменьшается снизу вверх. Внизу они достигают размера 12 мм, выше 7—8 мм и, наконец, до 4—5 мм. Обращает на себя внимание их послойная как бы отсортированность, что при увязке с вышеприведенными фактами может быть объяснено сносом их. В месте обитания *Carbonicola* представлены значительно более крупными размерами, чаще двумя закрытыми створками и в большинстве случаев лежащими

не по плоскости наслоения.* Еще выше *Carbonicola* исчезают и остаются очень мелкие, часто почти неопределенные *Naiadites quadrata* Sow. Наконец, появляются *Pterinopecten papyraceus* Sow., а еще выше *Bucania moravica* Kleb. etc. Последние представляют фацию глинисто-морскую, причем по ряду наблюдений *Pt. papyraceus*, если они имеются, всегда появляются раньше остальных, отмечая собой фацию глинисто-морскую.

Слой с *C. angulata* и *Naiadites quadrata* представляет собой переход от фации антракозид к фации глинисто-морской. Он характеризуется почти равноразмеренными формами, представленными одной либо двумя раскрытыми створками и лежащими по плоскости наслоения. В других случаях переходную зону отмечают *Antracomya*, но они как правило не доходят до фации глинисто-морской.

Далее на восток в кровле этого пласта везде залегает углистый сланец с антракозидами (1), а над ними переходная фация и наконец глинисто-морская.

Таким образом, на территории шахты № 19 до шахты № 7 Наклонной в подрываемой части пласта h_{10} имеются переходные зоны к фации антракозид; на территории шахты № 7 Наклонной имеются переходная зона к фации глинисто-морской и фация глинисто-морская; в Буденовском рудоуправлении и далее на восток — переходная к фации антракозид, фация антракозид, переходная к глинисто-морской и глинисто-морская.

Это указывает на возможное уменьшение мощности пласта в направлении SW и выдержанность его в направлении шахты № 4 Буденовского рудоуправления и шахты № 3 bis Мостинского рудоуправления.

Кровля пласта m_2 является показательной изменения фациальных условий по простиранию пласта еще более высоких фаций. Крайней западной разработкой этого пласта является шахта № 7 Трудовского рудника. Кровля этого пласта, если не считать верхнюю пачку угля 0.25 м мощности и пачки песчано-глинистой породы 0.15—0.20 м, отделяющей эту пачку, служит углистый сланец (точнее переслаивающийся уголь с глинистым сланцем) 0.05—0.10 м; над ним залегает чешуйчатый рыхлый глинистый сланец мощностью 0.10—0.15 м. Покрывают его крепкие светлосерые глинистые сланцы. В углистых сланцах после тщательных исследований были обнаружены обломки раковин *Anthracoceras aegiranum* H. Schmidt, являющейся характерной формой для этого пласта. В крепких глинистых сланцах найдены *Schizodus affinis* Herrick с одной и двумя раскрытыми створками.

В шахте № 10 Петровского рудоуправления нижние сланцы более плотные и в них обнаружены более разнообразные формы — также в виде обломков: *Pterinopecten* sp., *Anthracoceras aegiranum* H. Schmidt, *Bucania moravica* Kleb., *Nucula* aff. *gibbosa* Flem., *Clinopistha radiata* Hall, *Edmondia sulcata* Phillips, *Solenomya primaeva* Phill., *Lingula mytiloides* Wheelst. В вышележащих крепких глинистых сланцах обнаружены редкие *Schizodus affinis* Herrick.

В шахте № 10 bis Сталинского рудоуправления углистые сланцы исчезают, но зато увеличиваются в мощности покрывающие их в Петровском рудоуправлении глинистые сланцы. Здесь они доходят до 0.60—0.70 м. Разнообразнее становятся и органические остатки. Они представлены цельными формами и часто сравнительно крупными экземплярами. В этом слое определена следующая фауна: *Pt. subpapyraceus* Vern., *Aviculop. occidentalis* Schumard, *Murchisonia carbonaria* Eichw., *Loxonema rugosa* M. et W., *Clinopistha radiata* Hall, *Solenocheilus* cf. *cyclostoma* Phill., *Nautilus Nikitini* Tzwet., *Nautilus* sp., *Anthracoceras aegiranum* H. Schmidt etc.

Но уже с этого участка начинают встречаться слабо пиритизированные раковины.

В вышележащих светлосерых, плотных глинистых сланцах обнаружены *Schizodus affinis* Herrick, *Schizodus meekanis* Girty в таком же виде, как и на предыдущих участках.

В Макеевском рудоуправлении кровля пласта сохраняет свою структуру и фауну с той только разницей, что нижняя пачка представлена комковатым, как бы помятым глинистым сланцем, в котором и фауна подвергнута такому же смятию. В них преобладают раковины с двумя закрытыми створками и как правило они нацело пиритизированы. Такой пиритизации и преобладания *Schizodus* до этого не наблюдалось.

В Советском рудоуправлении нижний слой почти совсем исчезает. На глубине 120 м он еще в виде небольшого прослойка сохраняется, но уже на глубине 180 м его нет. Изменяется наряду с изменением мощности и структура его — он становится землистым, рыхлым. Фауна, оставаясь характерной для этого пласта, выше сменяется фауной, свойственной известнякам, хотя и очень однообразной. В шахте №№ 13 и 20 в глинистых сланцах обнаружены в большом количестве *Productus semireticulatus* Mart. и *Spirifer mosquensis* Fisch.

* Нужно не смешивать формы, положенные в результате образования сланцев.

Из всего сказанного выше можно видеть, что типично глинисто-морская фация представлена только в Сталинском рудоуправлении. В Петровском и Макеевском рудоуправлениях в кровле пласта имеются только переходные зоны. В Петровском рудоуправлении имеется переходная зона к глинисто-морской фации, так как даже *Pterinopecten* представлен обломками раковин, что свидетельствует об их нахождении не in situ. С другой стороны отсутствие пиритизации раковин и колчеданов над этой зоной указывает на высокое залегание фации сероводородного заражения.

Изучая распределение *Schizodus*, нами подмечено, что эти формы занимают самое высокое место в фации глинисто-морской и редко бывают представлены в ней одной либо двумя раскрытыми формами. Выше глинистые сланцы становятся светлосерыми либо желтовато-серыми. В них еще встречаются раковины *Schizodus*, но очень редко и как правило одной либо двумя раскрытыми створками, совершенно исчезая еще выше, где начинается фация сероводородного заражения.

Раковины *Schizodus*, если они представлены двумя нераскрытыми створками, отмечают собой верхнюю границу фации глинисто-морской, а раскрытыми створками — переходную к фации сероводородного заражения. Раскрытые створки этих форм, так же как и *C. angulata*, указывают на то, что они попадали в среду, им несвойственную.

В Макеевском рудоуправлении явно сокращена нижняя часть фации глинисто-морской, и более четко выявляется верхняя граница ее. Пиритизация раковин указывает на близкое местоположение фации сероводородного заражения.

В Советском рудоуправлении фация глинисто-морская и фация сероводородного заражения почти исчезают, но с другой стороны явно выявляется переход к фации известковисто-морской, в связи с чем появляются *Productidae* и *Spiriferidae*.

Все это свидетельствует об углублении водного бассейна, соответствующего по времени отложению кровли пласта m_2, на восток и появлении в этом направлении, в кровле пласта, известняка.

Судя по данным с разных глубин, в Советском рудоуправлении появление известняка в кровле этого пласта должно быть и на NNO.

С другой стороны это свидетельствует о продолжении пласта на запад от Трудовского рудника (до 10 км) достаточной для разработок мощности, возможно с небольшими колебаниями в результате размыва. На восток мощность пласта должна быть более выдержана.

Приближение фации сероводородного заражения к пласту каменного угля должно обусловливать большее содержание серного колчедана в пласте и наоборот удаление ея — меньшее количество их.

Суммируя данные по двум пластам, из которых один расположен в нижней части вестфальского яруса в зоне *A* (2) над горизонтом с *Gastrioceras subcrenatus* (3), другой в верхней и соответствует пласту Aegir Вестфалии и Petit Buisson Лимбурга и Франции (граница зон *C* и *B*), мы видим, что для обоих сравнительно отдаленных друг от друга пластов существовал открытый на восток водный морской бассейн.

Геологический научно-исследовательский институт при Днепропетровском государственном университете.

Поступило 9 II 1935.

THE MODIFICATIONS OF FACIAL CONDITIONS ALONG THE STRIKE OF THE ROOFING OF COAL MEASURES IN THE DONETZ BASIN

By I. N. EFIMOV

(*Communicated by V. A. Obručev, Member of the Academy, 9. II. 1935*)

In our latest paper (1) we showed the distribution of organic remains in the roofing of coal measures in the Donetz basin in the vertical direction, the following facies, including the coal seam, having been identified, viz.: 1) the continental or coal facies, 2) the facies overlying the coal (with vegetable remains), 3) the anthracosides facies, 4) the marine-argillaceous facies, 5) the facies contaminated with hydrogen sulphide.

In this paper we shall try to show the alternation of facial conditions also in the horizontal direction, i. e. in the direction of the strike. For this purpose it is important to show the transitional zones between the facies, the facies themselves having already been characterized.

The alternation of facies along the strike is the same as in the vertical direction, but thanks to their considerable extension (up to and over 30 km) their study is greatly facilitated. If we follow the seams across their strike, from the continental to the marine facies, we can observe the following alternation: the facies overlying the coal, the marine-argillaceous one, the facies contaminated with hydrogen sulphide and the calcareous facies.

The thickness of the lower facies will gradually decrease at the expense of the increase of the upper one until its total disappearance.

The transitions from one facies to another are more fully represented in the roofing of h_{10} and m_2 seams, which we shall mainly consider. Both these seams we shall follow from West to East.

We have begun to study the roofing of the seam h_{10} from shaft No 19. In this shaft the coal seam is overlaid by carbonaceous shales containing first unidentifiable vegetable remains in the shape of separate leaves, and then *Carbonicola* and *Naiadites*. Among the latter, separate leaves of plants are also found but so badly preserved that there is no possibility to identify them. We continued our study of vegetable remains in the roofing of other seams (h'_6 h_8), where they are much better preserved in the lower part of the layer, frequently in the form of twigs, which disappear higher up and are replaced by separate leaves in a much worse state of preservation.

We call the layer with imperfectly preserved vegetable remains and distinct traces of transportation a transitional one between the facies overlying the coal and the anthracosides facies. In shaft No 17, where there is a layer of arenaceo-argillaceous shales with roots of plants overlying the seam, remains of *Licopodites carbonaceus* Feistm. and *Neuropteris gigantea* Sternb. have been found higher up, in a good state of preservation. In shafts Nos 30 and 31, the organic remains and the structure of the roof correspond to the roofing of the seam of shaft No 19, which proves a more abundant watering of these outlying areas, as well as the existence of an alluvial continent on the territory of shaft No 17, i. e. the transition of the facies overlying the coal represented by argillaceous rocks into the arenaceo-argillaceous one.

In the inclined shaft No 7 (Naklonnaya), the formation of the seam was simultaneous with that of the carbonaceous shales containing the anthracosides, wherefore the carbonaceous shales merge into the coal seam, while the gray argillaceous shales of the roofing of the seam contain minute *Carbonicola angulata* Ryckholt (*Carbonicola similis* Pruvost — recent specimens) as well as *Naiadites quadrata* Sow. These forms are, as a rule, represented by one valve, and if they occur with two valves, they are invariably open and furthermore their size decreases upwards. Below they attain a dimension of 12 mm, higher up only 7—8 mm and finally only 4—5 mm.

The fact of their size being graduated according to depth is in itself significant, and taken in conjunction with the above mentioned facts may be accounted for by their having been washed down. In their own habitat *(in situ)*, the *Carbonicola* are represented by much bigger specimens, more frequently by two closed valves and in most cases lying outside the plane of stratification.*

Still higher the *Carbonicola* disappear, and only minute, frequently almost unidentifiable *Naiadites quadrata* Sow. remain. At last, *Pterinopecten papyraceus* Sow. appear and, higher still, *Bucania moravica* Kleb., etc. The latter represent the argillaceous-marine facies and, according to a number of observations, the *Pt. papyraceus* Sow., if any, always appear before the rest, being characteristic of the argillaceous-marine facies.

The layer with *Carbonicola angulata* and *Naiadites quadrata* is a transition from the anthracosides faceis to the argillaceous-marine one. It is characterized by almost equidimensional forms represented by one or by two open valves and lying along the plane of stratification. In other cases, *Anthracomya* mark the transitional zone, but, as a rule, they do not attain the argillaceous-marine facies.

Farther East carbonaceous shales with anthracosides are deposited everywhere in the roofing of this seam (1); over them the transitional facies and at last the argillaceous-marine one.

Thus, on the territory of shaft No 19 down to the inclined shaft No 7 (Naklonnaya), there is, in the explored part of the h_{10} seam, a zone marking the transition to the anthracosides facies; on the territory of schaft No 7 (Naklonnaya), there is a zone transitional to the argillaceous-marine facies and an argillaceous-marine facies; in the Budenovski district and farther to the East, there is a zone transitional to the anthracosides facies and an anthracosides facies, a zone transitional to the argillaceous-marine facies and an argillaceous-marine facies.

This points to a possible decrease in the thickness of the seam in the SW direction and its uniformity in the direction of shaft No 4, Budenovski district, and No 3 bis, Mostinski district.

The roofing of m_3 seam shows some modifications of facial conditions along the strike of the upper facies. Shaft No 7, Trudovski district, is the westernmost one sunk in that seam. Carbonaceous shale (or to be more exact coal alternating with argillaceous shale) 0.05—0.10 m thick forms the roofing of that seam, if we leave out of consideration the upper layer of coal 0.25 m thick and a layer of sandy argillaceous rock 0.15—0.20 m thick, separating the latter. Over it there is a friable scaly argillaceous shale 0.10—0.15 m thick, overlain by solid light-gray argillaceous shales.

In the carbonaceous shales, careful examination revealed fragments of *Anthracoceras aegiranum* H. Schmidt shells, which are a characteristic form for this seam. The solid argillaceous shales were found to contain *Schizodus affinis* Herrick with one or two opened valves.

In shaft No 10, Petrovski district, the lower shales are the more compact ones and contain a greater variety of forms, but also in the shape of fragments, viz.: *Pterinopecten* sp., *Anthracoceras aegiranum* H. Schmidt, *Bucania moravica* Kleb., *Nucula* aff. *gibbosa* Flem., *Clinopistha radiata* Hall, *Edmondia sulcata* Phillips, *Solenomya primaeva* Phill., *Lingula mytiloides* Wheelst.

In the overlying shales, rare specimens of *Schizodus affinis* Herrick are to be found.

In shaft No 10 bis, Stalinski district, the carbonaceous shales disappear, whereas the argillaceous shales covering them in the Petrovski district increase in thickness. Here they attain 0.60—0.70 m. The organic remains show a greater variety, too. They are represented by intact forms and frequently by relatively big specimens. In this layer, the following are to be found: *Pterinopecten subpapyraceus* Vern., *Aviculopecten occidentalis* Schumard, *Murchisonia carbonaria* Eichw., *Loxonema rugosa* M. et W., *Clinopistha radiata* Hall, *Solenocheilus* cf. *cyclostoma* Phill., *Nautilus Nikitini* Tzwet., *Nautilus* sp., *Anthracoceras aegiranum* H. Schmidt.

From this point on, slightly pyritized shells begin to occur.

In the overlying compact light-gray argillaceous shells, *Schizodus affinis* Herrick, *Schizodus meekamis* Girty are to be found in the same form as in the foregoing places.

In Makeyevski district, the roof of the seam retains its structure and fauna, the only difference being that the lower layer is represented by a lumpy, as it were, crumpled up argillaceous shale, whose fauna has undergone a similar crumpling. Shells with two closed valves predominate in these shales and, as a rule, they are completely pyri-

* One must not confuse the forms deposited as the result of the formation of shales.

tized. Neither such a pyritization, nor such a predominance of *Schizodus* has so far been observed.

In Soviet district, the lower layer disappears almost entirely. At a depth of 120 m it is still to be found as a thin streak, but from a depth of 180 m downwards it is absent. The change of thickness is accompanied by a change in structure — it becomes earthy and friable. The fauna, while remaining characteristic of this seam, is higher up replaced by a fauna peculiar to limestones, though it lacks variety. In the argillaceous shales of shafts Nos 13 and 20 *Productus semireticulatus* Mart., and *Spirifer mosquensis* Fisch. are to be found in great quantities.

All this shows that the typical argillaceous-marine facies is represented only in the Stalinski district. In Petrovski and Makeyevski districts, only transitional zones are to be found in the roofing of the seam. In Petrovski district, there is a transitional zone and an argillaceous-marine facies, as even *Pterinopecten* is represented by fragments of shells, which proves their not being *in situ*. On the other hand, the absence of pyritized shells and of pyrites above this zone indicates that the facies contaminated with hydrogen sulphide occurs at a comparatively small depth.

In studying the distribution of *Schizodus*, we notice that these forms occupy the highest position in the argillaceous-marine facies and are seldom represented in it by one or two opened forms. Higher up, the argillaceous shales become light-gray or yellowish-gray. *Schizodus* shells are still to be found in them, but very seldom and, as a rule, with one or two opened valves, entirely disappearing still higher, where the facies contaminated with hydrogen sulphide begins.

The *Schizodus* shells, if represented by two closed valves, mark the upper boundary of the argillaceous-marine facies; if represented by open valves, they mark the facies transitional to the one contaminated with hydrogen sulphide. The open valves of these forms, as well as those of *Carbonicola angulata*, show that they had got into an uncongenial medium.

In Makeyevski district, the lower part of the marine-argillaceous facies is distinctly reduced, while its upper boundary is more clearly discernible. The pyritized shells show the nearness of the facies contaminated with hydrogen sulphide.

In Soviet district, both the argillaceous-marine facies and the facies contaminated with hydrogen sulphide almost disappear, but, on the other hand, the transition to the limestone-marine facies becomes more apparent, and, in connexion with this, *Productidae* and *Spiriferidae* begin to appear.

All this points to the deepening of the water basin to the East at the time of the deposition of the roofing of m_2 seam and to the formation of limestone in the roofing of the seam in that direction.

To judge from the data obtained from different depths in Soviet district, the occurrence of limestone in the roofing of this seam must also extend to the NNO. On the other hand, this points to an extension of the seam to the West of the Trudovski mine (for about 10 km) of a thickness great enough to warrant mining, subject, perhaps, to slight variations due to erosion. To the East, the thickness of this seam must be more uniform.

The approach of the facies contaminated with hydrogen sulphide to the coal seam must increase the content of pyrites in the seam, while its recession must, on the contrary, result in a reduction of its quantity.

In summing up the data for the two seams, one of which is in the *A* zone of the Lower Westphalian group ([2]) overlying the *Gastrioceras subcrenatum* horizon ([3]), and the other in the Upper Westphalian and corresponds to

the Aegir seam in Westphalia and the Petit-Buisson in Limburg and France (the boundary of the *B* and *C* zones), we see that both of these seams, fairly distant from each other, had a marine basin open to the East

Geological Research Institute
of the Dnepropetrovsk State University.

Received
9. II. 1935.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — REFERENCES

[1] И. Н. Ефимов, ДАН, 1934, т. II, № 6, стр. 376. I. Efimov, C. R., Acad. Sci URSS, 1934, v. II, № 6, p. 378. [2] Congrès pour l'avancement des études de stratigraphie carbonifère. Heerlen, 7—11 juin, 1927, Compte rendu. [3] М. Лебедев, Матеріали до Геології Донецького кам'яновугільного бассейну. Наукові записки Дніпропетровської філії Геологічного інституту, 1932.

ГЕНЕТИКА

А. А. ПРОКОФЬЕВА-БЕЛЬГОВСКАЯ

СТРУКТУРА ХРОМОЦЕНТРА

(Представлено академиком Н. И. Вавиловым 11 VI 1935)

1. Хромосомы в ядрах клеток слюнных желез *Drosophila melanogaster* имеют на своих проксимальных концах районы с очень тонкими, повидимому простыми, поперечными линиями.

2. *X*-хромосома имеет наиболее длинный район с подобными тонкими полосами (от 7 до 10); этот район соответствует району, именуемому инертным на карте метафатической хромосомы. Следующий по длине подобный район имеется в III-*R* (5—6 дисков), а наиболее короткий — в II-*L* (2—3 диска).

3. Эти районы, занимающие проксимальные части хромосом, составляют периферию хромоцентра.

4. Глубже, чем периферические, отделимые друг от друга части хромоцентральных районов хромосом, лежит центральная часть хромоцентра, образованная 10—20 замкнутыми (т. е. более или менее круговыми) полосами. Эти полосы входят в состав наиболее проксимальных частей всех хромосом, идя от одной к другой и соединяя их все вместе в одну систему.

5. Эти общие соединяющие полосы могут быть объяснены конъюгацией гомологичных локусов. На этом основании можно заключить, что проксимальные концы всех хромосом содержат гомологичные гены, расположенные в одинаковом порядке.

Институт генетики.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
11 VI 1935.

GENETICS

THE STRUCTURE OF THE CHROMOCENTRE

By A. A. PROKOFJEVA-BELGOVSKAJA

(*Communicated by N. I. Vavilov, Member of the Academy, 11. VI. 1935*)

1. The chromosomes in the nuclei of the salivary gland cells of *Drosophila melanogaster* have at their proximal ends regions of very fine, apparently simple cross-striations.

2. The *X* chromosome has the longest region of such fine striations (7 to 10); this region corresponds to that designated as the inert region in the map of the metaphase chromosome. The next largest region of this kind is in III-*R* (5 to 6 discs), and the shortest is in II-*L* (2 to 3 discs).

3. These regions, lying in the proximal portions of the chromosomes, constitute the periphery of the chromocentre.

4. Deeper than the peripheral, separable parts of the chromocentral regions of the chromosomes lies the central part of the chromocentre, formed of 10 to 20 closed (i. e. more or less circular) striations. These striations constitute the most proximal parts of all the chromosomes and they are common striations, running from one chromosome to another and connecting them all together into one system.

5. These common connecting striations are interpreted as effects of the conjugation of homologous loci. On this basis, it is inferred that the proximal ends of all the chromosomes contain homologous genes, arranged in the same sequence.

Institute of Genetics
Academy of Sciences of the USSR.
Moscow.

Received
11. VI. 1935.

ГЕНЕТИКА

С. Г. ЛЕВИТ

О ДОМИНАНТНОСТИ У ЧЕЛОВЕКА

(*Представлено академиком ВУАН А. А. Сапегиным 18 IV 1935*)

Довольно распространенным является мнение о том, что у человека, так же как и у большинства других изученных видов растений и животных большинство мутантных генов является рецессивным. В частности, это обстоятельство подчеркнуто Р. А. Фишером при обосновании им теории эволюции доминантности. В качестве одного из доказательств такого взгляда приводится якобы доказанный факт наличия сравнительно большого числа рецессивных генов, сцепленных с полом, при почти полном отсутствии в половой хромосоме генов доминантных (Левит, 1929; Фишер, 1930). Если последнее утверждение верно, то естественно, что аналогичное явление должно наблюдаться и в аутосомах. Но так как доказать рецессивность большинства аутосомных мутантных генов затруднительно, то это склонны объяснять большей трудностью обнаружения в аутосомах рецессивов в сравнении с доминантами. Наоборот, в *X*-хромосоме рецессивные гены открываются сравнительно легко.

Многолетние систематические исследования мои и моих сотрудников целого ряда наследственных болезней человека, взятых для изучения с точки зрения здесь обсуждаемой проблемы, в порядке случайности, обнаружили как раз обратное явление: все они оказались доминантными с большей или меньшей ограниченностью фенотипического проявления. Явление это обнаружено при Базедовой болезни (Левит, Рывкин и др.), язвенной болезни (Левин и Кучур), белокровии (Ардашников), сахарном диабете (Левит и Песикова), евнухоидизме (Лихциер), гипертонии (Рывкин, Малкова и Кантонова), а также, повидимому, при бронхиальной астме (Малкова), злокачественном малокровии (Пресняков) и др. Следует, правда, указать, что поскольку все перечисленные заболевания не известны нам пока в гомозиготном состоянии, постольку следовало бы их назвать не доминантными, а условно-доминантными, ибо нет уверенности в том, что гомозигота *AA* действительно похожа на гетерозиготу *Aa*: в этих и во многих других аналогичных случаях нам лишь хорошо известно, что уже гетерозигота производит резкий патологический эффект. Категория условно-доминантных генов является таким образом лишь временной: по мере выяснения поведения гомозигот эти гены будут переходить либо в межуточные, либо в доминантные (последнее менее вероятно).

Возникает вопрос: не являются ли случайными полученные нами результаты? Критический просмотр литературы убеждает нас в том, что подмеченное нами явление характерно для человека вообще. Так, систематические исследования литературных данных (далеко еще незаконченные) дали следующие результаты для аутосомных генов:

Условно-доминантные	Рецессивные	Межуточные
24	10	3

Какие критерии являются более или менее убедительными при обсуждении вопроса о рецессивности или доминантности того или иного признака человека? Наиболее убедительными мы считаем два: это, во-первых, процент инбридинга (который в той или иной степени повышен при рецессивности) и, во-вторых, результаты сравнения по данному признаку разных категорий родственников, в первую очередь братьев с детьми resp. родителями; превалирование первой категории над последними двумя при рецессивных признаках не требует особых доказательств.

Еще более убеждает нас в правильности вышеуказанной интерпретации наследственных болезней человека обнаружение доминантности при весьма редких признаках: в таких случаях установление рецессивного или доминантного характера изучаемого признака вообще не представляет никакого труда.

Выше указывалось, что наряду с доминантностью, второй, не менее характерной, чертой большинства патологических мутантных генов человека является их крайняя вариабильность: по ряду изученных нами признаков мы можем с большей или меньшей уверенностью утверждать, что фенотопическое проявление имеет место от долей процента до 10—20% и сравнительно редко выше. Наоборот, рецессивные гены, как правило, хорошо проявляются в гомозиготе.

Как же с этим явлением согласовать выше цитированное нами обстоятельство, заключающееся в том, что почти все гены, локализованные в X-хромосоме (а их в литературе можно найти около 30), являются рецессивными? Оказывается, что подобное утверждение неверно и что

детальное изучение всех описанных фактов приводит как раз к обратному выводу (из генов, сцепленных с полом, действительно доказанные рецессивы являются лишь ничтожным меньшинством).*

Что касается объяснения вышеизложенных фактов, то принимая эволюцию доминирования (в данном случае не имеет существенного значения, какую именно теорию эволюции принять — Фишера, Холдена, Плэнкет-Мёллера), можно высказать гипотезу, заключающуюся в том, что патологическая мутация человека еще не завершила того цикла развития, который приводит к полной рецессивности; однако, то обстоятельство, что мутантные доминантные гены почти все фенотипически крайне вариабильны и что следовательно эти гены могут быть трактованы как уже ставшие частично рецессивными, заставляет думать, что процесс этот в отношении генов человека имел место, но закончился лишь в отношении меньшинства из них (быть может тех, которые возникли раньше). Замедление же процесса эволюции доминирования можно объяснить резким замедлением процесса естественного отбора с того времени, как предок человека стал применять хотя бы элементарные орудия трудовой деятельности.**

В связи с этим небезинтересно также отметить напрашивающуюся закономерность в более раннем фенотипическом проявлении рецессивной гомозиготы в сравнении с условно-доминантной гетерозиготой: не исключена возможность того, что эволюция доминирования, по крайней мере в отдельных случаях, касается в первую очередь возраста проявления гена, отодвигая сроки последнего за период воспроизводительной способности (целый ряд условно-доминантных генов проявляется лет в 40 и позже). Эти гены можно таким образом трактовать как уже ставшие рецессивными для первого периода жизни (т. е. для того периода, который наиболее важен с точки зрения воспроизводства потомства) и как сохранившие еще свои патологические черты для более позднего жизненного цикла. Не исключена поэтому возможность того, что многие из болезней, характерных для старости, обусловлены доминантными (или условно-доминантными) генами, которые для более раннего периода жизни успели уже стать рецессивами.

В заключение считаю уместным привести следующую классификацию генов человека в отношении доминантности. В этом смысле гены человека можно делить следующим образом:

1) Полностью доминантные (таких очевидно очень мало).

2) Условно-доминантные, большая часть которых плохо проявляется. Сюда, очевидно, относятся большинство мутантных генов человека.

3) Межуточные.

4) Рецессивные (по мере их изучения все более и более удается обнаружить хотя бы легкое проявление их в гетерозиготе).

Категории 3 и 4 составляют вместе вторую по численности группу генов человека.

4а) Некоторые из рецессивных генов и в гомозиготе не дают полного проявления. Есть основание причислить сюда, например, эпилепсию, шизофрению и др. С точки зрения теории Фишера их можно трактовать таким образом, что процесс эволюции доминирования, сделав гетерозиготу

* Более подробно см. С. Г. Левит, „Сцепленные с полом гены человека".

** Замедление естественного отбора в человеческом обществе могло иметь следствием и другое обстоятельство — потерю рецессивности некоторыми из тех генов, которые раньше успели приобрести ее (мысль, высказанная в беседе с автором Г. Г. Меллером).

похожей (или почти похожей) на дикий тип, начал проявлять свое действие и в отношении гомозиготы, накапливая модификаторы, не дающие возможности проявляться последней.

5) Неопределенные. Эта категория относится исключительно к генам, сцепленным с полом, касаясь тех из них, которые полностью ограничены мужским полом. В этом случае отличить доминантные от рецессивных генов становится невозможным (сюда, повидимому, относится, в частности, гемофилия).*

Автор выражает свою благодарность Г. Г. Мёллеру за ценные критические замечания.

Медико-биологический
институт им. М. Горького.
Москва.

Поступило
18 IV 1935.

GENETICS

DOMINANCE IN MAN

By S. G. LEVIT

(*Communicated by A. A. Sapehin, Member of the Ukrainian Academy, 18. IV. 1935*)

It is generally supposed that the majority of mutant genes in man, as well as in most of the plants and animals which have been studied, are recessive, the affected individuals being homozygous. This point has been especially stressed by R. A. Fisher in working out his theory of the evolution of dominance. The almost complete absence of dominant genes in the sex-chromosome together with a relatively large number of recessive sex-linked genes, is often given as the reason for this viewpoint (Levit, 1929; Fisher 1930). If this evidence is correct, then similar facts should also be observable for the autosomes. When it was difficult to show a majority of recessives in the autosomes, investigators were inclined to suppose simply that the discovery of autosomal recessives was more difficult than the discovery of autosomal dominants. As a matter of fact, recessive genes in the *X*-chromosome are discovered rather easily.

Systematic investigations of hereditary diseases in man have been carried on by the writer and the staff of the Medico-Biological Institute for several years. These investigations have revealed facts contrary to the above suppositions. The diseases studied have all proved to be in some degree dominants, inasmuch as the affected individuals are ordinarily heterozygotes with more or less limited phenotypic expression. These diseases are: Basedow's disease (Levit, Ryvkin, and others), ulcus ventriculi (Levin, Kuchur), leukemia (Ardašnikov), diabetes mellitus (Levit and Pesikova), eunuchoidism (Lichzier), hypertonus (Ryvkin, Malkova and Kantonova), and probably bronchial asthma (Malkova), and pernicious anemia (Presniakov). Since it is uncertain that the homozygote *AA* is similar to the heterozygote *Aa* and since the homozygous states of these diseases are not

* Более подробно см. С. Г. Левит, „Сцепленные с полом гены человека".

known, it would seem best to name them „conditionally dominant". It is only certain that the heterozygote is clearly pathological. The group of conditionally dominant genes should be considered only a provisional one: in so far as the behaviour of the homozygotes becomes established, these genes will be converted into intermediates or complete dominants (the latter seems to be less probable).

A critical analysis of the data in the literature shows that the phenomenon which we have observed is really characteristic for the human species. A systematic study of the literature concerning hereditary diseases (this study is not yet complete) reveals that among those studied 24 could be regarded as conditionally dominant, 10 as recessive, and 3 as intermediate. As criteria of dominance or recessiveness we have taken 1) percentage of inbreeding among parents (which is heightened in the case of recessiveness) and 2) the comparison of incidences among various degrees of relationship; primarily the comparison of sibs with children or with parents. The greater incidence of a recessive character among the siblings as compared with children or parents does not require special demonstration As a further evidence of the correctness of our interpretation of hereditary diseases we may note that among the very rare traits, for which dominance or recessiveness is of course more readily determinable, the majority are dominants.

As mentioned above, another characteristic of the majority of pathological mutant genes in man is their extreme variability in respect of incidence of expression. With regard to the diseases which we have studied it seems safe to assume that penetrance (% of individuals possessing the gene which manifest it) is usually very low and is seldom higher than about 20%. On the other hand, recessive genes are usually well expressed in the homozygote.

How may this be reconciled with the supposed fact that most of the genes which have been localized in the *A*-chromosome are recessive? In reality, analysis has proved that only a few of the sex-linked genes are recessive.*

Accepting the theory of the evolution of dominance according to any of the interpretations of Fisher, Haldane, Plunkett-Muller, it is postulated that in man pathological mutations have not as yet all completed the process leading to complete recessiveness. Since most mutant genes are extremely variable phenotypically and may therefore be considered partly recessive already, it is concluded that, although this process has been taking place in the genes of man, it has been completed or remained in only a few of the (probably earlier appearing) mutations. This slowing up or retrogression of the evolution of dominance is explained as due to a marked inhibition of natural selection dating since man's first use of elementary tools.

It is interesting to note that the phenotypic expression of the recessive homozygote appears on the average earlier in life than the phenotypic expression of the conditionally dominant heterozygote. In at least some cases it is possible that evolution of dominance involves primarily age of expression of the gene. A number of conditionally dominant genes are not expressed until after the age forty or until the period when the reproductive capacity has been lost. From the point of view of reproduction, we may thus regard such genes as recessive during the reproductive period and as pre-

* See G. Levit, „Sex-Linked Genes in Man".

serving their pathological expressions for a later period of life. That is to say, it is possible that many diseases characteristic of old age are determined by dominant or conditionally dominant genes which are recessive in earlier life.

In conclusion the following classification of the genes of man with respect to dominance is presented:

1) Complete dominants. There seem to exist very few of these.

2) Conditional dominants, the majority of which have a rather poor penetrance. These seem to constitute the majority.

3) Intermediates.

4) Recessives. Further study of these tends to reveal their expressions in the heterozygote, but not enough to be recognized as affected individuals in the ordinary classification. These and the intermediates are second in number.

4a) Some of these recessives are not always expressed even in the homozygote. There is reason to believe that this is true of epilepsy and schizophrenia, for example. According to Fisher these may be interpreted as follows. After rendering the heterozygote like or almost like the dominant homozygote, the evolution of dominance continues with the accumulation of modifiers of the homozygote, thus finally inhibiting its expression too.

5) Indeterminates. These are those sex-linked genes which are completely limited to the male. It is impossible to distinguish dominants from recessives here. Haemophilia probably belongs here. (See Levit, „Sex-Linked Genes in Man".)

The author wishes to express his thanks to Dr H. J. Muller for his valuable criticisms.

Maxim Gorky Medico-Biological
Research Institute. Moscow.

Received.
18. IV. 1935.